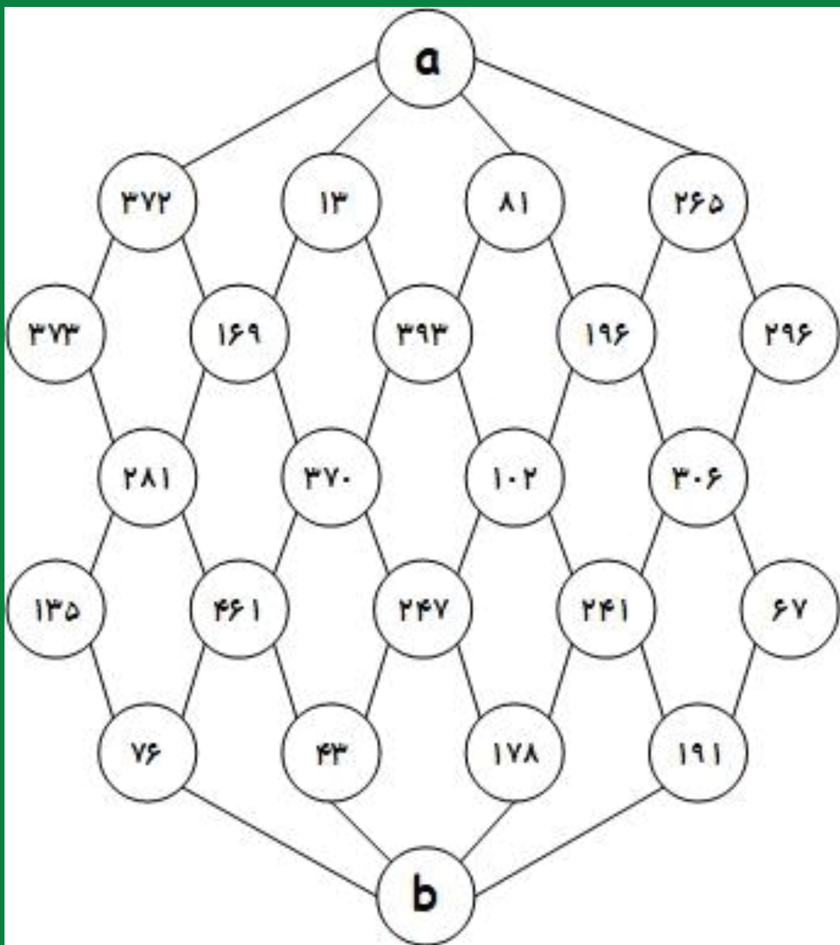
ریاضیات محاسبه‌ای

پرویز شهریاری

جلد چهارم

(سال دوم دبیرستان - نیمسال دوم)

نظام جدید آموزشی



قابل استفاده:

۱. دانش‌آموزان دوره دبیرستان (نظام جدید)؛

۲. همه کسانی که می‌خواهند ریاضیات را پیش خود یاد بگیرند؛

۳. همه داوطلبان کنکورها و المپیادها.

پرویز شهریاری

ریاضیات محاسبه ای ۴

(سال دوم دبیرستان ـ نیم سال دوم)

نظام جدید آموزشی

تهران ـ ۱۳۷۵

خیابان دانشگاه ـ کوچهٔ میترا ـ شمارهٔ ۷ تلفن ۶۴۱۸۸۳۹ ـ ۶۴۶۹۹۶۵

ریاضیات محاسبه‌ای (جلد چهارم)

پرویز شهریاری

چاپ دوم: تهران ـ ۱۳۷۷

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

چاپ: چاپخانه رامین

شابک ۷ ـ ۸۰ ـ ۵۵۰۹ ـ ۹۶۴ ISBN 964 - 5509 - 80 - 7

شابک دورهٔ ۴ جلدی ۳ ـ ۹۶ ـ ۵۵۰۹ ـ ۹۶۴

ISBN 964 - 5509 - 96 - 3 (4 Vol. Set)

۱۳۰۰ تومان

فهرست

پیش از آغاز و یادآوری ۷

۱. ریاضیات ... برخاسته از مشاهده، تجربه و نیازهای انسانی است ۹

۲. ریاضیات، دانش جزمی «دو دوتا چهارتا» نیست ۱۵

۳. پیشرفت ریاضیات ... مسیری هموار نداشته است ۲۱

۴. آیا انسان‌های نخستین، وحشی و آدم‌خوار بوده‌اند؟ ۲۹

۵. انسان مقهور دانش خود نخواهد شد ۳۱

تمرین‌ها ۳۳

۱. آمار و آمار ریاضی ـ احتمال ۴۲

§۱. آشنایی با واژه‌های آمار و آمار ریاضی ۴۲

*§۲. آشنایی با واژه احتمال ۴۵

*§۳. نظریهٔ اطمینان بخشی ۵۲

§۴. قراردادها و تعریف‌های نخستین در آمار ۵۶

§۵. احتمال ۶۹

تمرین‌ها ۷۹

۲. نابرابری کوشی ـ نامعادله ـ تعیین علامت
چندجمله‌ای‌های جبری ۸۳
§۱. یک نابرابری اتحادی مهم. نابرابری میانگین‌ها یا
نابرابری کوشی ۸۳
§۲. علامت عبارت‌های $ax + b$ و $ax^2 + bx + c$ به‌ازای
مقدارهای حقیقی x ۹۳
§۳. معیارهای حقیقی بودن ریشه‌های یک عبارت درجه دوم ۱۰۰
تمرین‌ها ۱۰۴

۳. مثلثات ۱۱۱
§۱. یادآوری ۱۱۱
§۲. محاسبهٔ خط‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ برحسب
خط‌های مثلثاتی α و β ۱۲۰
§۳. دستورهای دیگر ۱۲۵
تمرین‌ها ۱۲۹

۴. آنالیز ترکیبی ۱۳۵
§۱. آشنایی ۱۳۵
§۲. جای‌گشت یا تبدیل ۱۴۰
§۳. ترتیب یا آرایش ۱۴۳
§۴. ترکیب ۱۴۸
تمرین ۱۵۲

۵. بردار و محاسبه برداری ۱۵۶
§۱. ورود به موضوع ۱۵۶

§۲. تعریف بردار ۱۶۶
§۳. عمل با بردارها ـ محاسبهٔ برداری ۱۷۲
§۴. تصویر بردار و مختصات بردار ۱۸۰
§۵. حاصل‌ضرب عددی یا حاصل‌ضرب اسکالر و بردار ۱۸۵
تمرین‌ها ۱۸۷

۶. ماتریس ـ دترمینان ۱۹۱
§۱. ورود به مطلب ۱۹۱
§۲. تعریف ماتریس‌ها و گونه‌های مختلف آن ۱۹۴
§۳. عمل با ماتریس‌ها ۱۹۷
§۴. دترمینان ۲۱۶
§۵. دستگاه‌های دومجهولی خطی ۲۲۵
§۶. دستورهای هندسی به‌یاری دترمینان ۲۳۰
§۷. پدیدآورندگان مفهوم‌های ماتریس و دترمینان ۲۳۴
تمرین ۲۳۵

پاسخ، راهنمایی و حل تمرین‌ها ۲۴۰
پیش از آغاز و یادآوری ۲۴۰
آمار و آمار ریاضی ـ احتمال ۲۹۱
نابرابری کوشی ـ نامعادله ـ تعیین علامت چندجمله‌ای ۳۰۹
مثلثات ۳۳۷
آنالیز ترکیبی ۳۶۰
بُردار و محاسبهٔ برداری ۳۷۳
ماتریس ـ دترمینان ۳۸۶

از پرویز شهریاری

منتشر شده است:

● ریاضیات محاسبه‌ای (جلد اول) ـ سال اول دبیرستان ـ نیم سال اول	۱۲۰۰ تومان
● ریاضیات محاسبه‌ای (جلد دوم) ـ سال اول دبیرستان ـ نیم سال دوم	۱۴۰۰ تومان
● ریاضیات محاسبه‌ای (جلد سوم) ـ سال دوم دبیرستان ـ نیم سال اول	۱۵۰۰ تومان
● ریاضیات محاسبه‌ای (جلد چهارم) ـ سال دوم دبیرستان ـ نیم سال دوم	۱۳۰۰ تومان
● ریاضیات محاسبه‌ای (جلد پنجم) ـ سال سوم دبیرستان ـ ریاضی‌فیزیک	۱۶۰۰ تومان
● مسأله‌های المپیاد آمریکا ـ با حل	۴۰۰ تومان
● مسأله‌های المپیاد شوروی ـ با حل	۱۲۰۰ تومان
● مسأله‌های المپیاد کشورهای مختلف ـ با حل	۱۶۰۰ تومان
● مهم‌ترین مسأله‌ها و قضیه‌های دشوار ریاضی	۱۵۰۰ تومان
● بازی‌ها ـ سرگرمی‌ها ـ معماها در ریاضیات	۱۲۰۰ تومان
● نظریهٔ ساختمان‌های هندسی	۶۰۰ تومان
● نابرابری	۶۰۰ تومان
● هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی (مسأله با حل)	۱۲۰۰ تومان

پیش از آغاز و یادآوری

گالیله می‌گفت: ریاضیات زبان طبیعت است و، برای آشنایی با قانون‌های حاکم بر طبیعت، باید زبان آن را یاد گرفت. ولی در آغاز، باید دید «دانش ریاضی» چگونه دانشی است، تاچه اندازه اعتبار دارد و تا کجا می‌توان به آن اعتماد کرد!

در سال‌های پایانی دههٔ چهل، و یا شاید سال‌های آغازین دههٔ پنجاه، گردانندگان وقت تلویزیون ایران، برنامه‌ای، «شُو» مانند ترتیب داده بودند. موضوع این برنامه که نام «بحث آزاد» برخود داشت ـ بحث دربارهٔ دیدگاه‌های گوناگون فلسفی بود، بحثی خنده‌دار و نمونهٔ روشنی از تلاش برای سردرگم کردن کسانی که به فلسفه علاقه‌مند بودند. به زمینهٔ فلسفی بحث، که بسیار کم‌مایه و گمراه کننده بود، کاری نداریم. حیرت‌آورترین بخش این بحث «علمی» و «فلسفی»، در جایی بود که، دو طرف بحث، تلاش می‌کردند، برای «اثبات» دیدگاه خود، از ریاضیات یاری بگیرند. یکی می‌گفت، ساختمان ریاضیات بر نقطه بنا شده است که، بنا به تعریف خود ریاضی‌دانان، «هیچ بُعدی ندارد» و با همین «هیچ» است که، در ریاضیات، «همه‌چیز» را می‌سازند و بنابراین، باید پذیرفت، همه‌جا و در همهٔ زمینه‌ها، می‌توان از هیچ، همه چیز را به‌وجود آورد. در غیر این صورت، باید از پذیرفتن ریاضیات، به عنوان یک

دانش، سر باز زد و آن را ساختهٔ ذهن پرتخیل بشر دانست که اگر هم، گاهی کاربردی در زندگی و دیگر دانش‌ها پیدا می‌کند، چیزی تصادفی است. تخیل اعتباری ندارد و، بنابراین، برای ریاضیات هم نمی‌توان اعتباری قایل شد.

دیگری که به گمان خود از ریاضیات دفاع می‌کرد، برای «اثبات» نیرومندی ریاضیات، «استدلال» می‌کرد: اگر معادلهٔ درجه دوم حل نمی‌شد و اگر انسان به مفهوم عددهای موهومی پی نمی‌برد، هرگز نمی‌توانست به فضای کیهانی دست یابد و ماه و زهره را در میدان بررسی و مطالعهٔ خود قرار دهد. و من حیرت‌زده می‌اندیشیدم که، عمل معادلهٔ درجه دوم و درک معنای عددهای موهومی، چه رابطهٔ مستقیمی با پرتاب موشک و دست‌یابی به فضا دارد!

لازم نیست به گذشته‌های دور مراجعه کنیم؛ امروز هم، حتا در برخی مجلس‌ها و محفل‌های جدی، به چنین افسانه‌سرایی‌هایی دربارهٔ ریاضیات برخورد می‌کنیم. این افسانه‌سرایی‌ها، هم دربارهٔ تاریخ ریاضیات و هم دربارهٔ روش‌های ریاضیات و یا میزان توانایی آن در حل دشواری‌های بشری، وجود دارد.

ولی افسانه، هرقدر که زیبا و دلنشین باشد، با واقعیت فرق دارد. از سوی دیگر، افسانه‌سرایی و روایت‌پردازی کاری است به مراتب ساده‌تر و دست‌یافتنی‌تر از کشف واقعیت. و انسان مظلوم و رنج‌دیده‌ای که در تمامی درازای تاریخ گذشتهٔ خود، مورد سودجویی آزمندان و زورمداران بوده و، به همین دلیل، در ناآگاهی نگه داشته شده است، افسانه‌های زیبا را بهتر می‌پذیرد تا واقعیت‌های تلخ و دشوار را. اما اگر راهی برای رهایی انسان وجود داشته باشد، جز از میان همین سنگلاخ‌های واقعیت نمی‌گذرد. سرزمین‌های زیبای «شاه پریان» تنها در تخیل آرزومند بشر وجود دارد. این افسانه‌ها، از یک طرف معرف آرزوهای «دست نیافتنی» بشر به آرامش و زندگی انسانی، و کشش او به سوی جهانی زیبا و انسان‌هایی برابر حقوق است و، از طرف دیگر، خود، به صورت مانعی برای شناخت واقعیت‌ها و درک راه درست مبارزه با تلخ‌کامی‌ها

و ستم‌های موجود درمی‌آید. ولی به هر حال افسانه، افسانه است و حتا اگر تنها با ارزیابی‌های مثبت خود با آن روبه‌رو شویم، جز به‌کار تلطیف آرزوها و تسکین دل‌های آرزومند نمی‌خورد.

با همهٔ این‌ها باید پذیرفت که زبان «افسانه‌های عامیانه»، بسیار کمتر از زبان «افسانه‌سرایی»هایی به اصطلاح علمی است، چرا که اولی تبلوری از آرزوهای نهفته و برآورده نشدهٔ انسان‌های دردمند است و دومی، به قصد فریب مردم و نیرو بخشیدن به جهل و بداندیشی پدید آمده است.

به همین دلیل، برای آشنایی با ریاضیات و برای زدودن ابهام‌های ناشی از کژاندیشی در تاریخ ریاضیات، لازم است در آغاز، به چند نکتهٔ اساسی اشاره‌ای داشته باشیم.

۱. ریاضیات، همچون همهٔ دانش‌ها و آگاهی‌های دیگر، برخاسته از مشاهده، تجربه و نیازهای انسانی است.

> ما به کودکی می‌مانیم که در کنار دریا گردش می‌کند. در آغاز، به‌خاطر یافتن سنگ‌ریزه‌ای صاف و شفاف و، سپس، با دیدن صدفی زیبا و خوش‌رنگ، غرق در شادی می‌شود، در حالی که اقیانوس بی‌کران حقیقت، ناشناخته و دست‌نخورده، روبه‌روی او گسترده است.
>
> نیوتون

همهٔ ما، ریاضیات را از عددشماری و عددنویسی آغاز کرده‌ایم. کودکی که، برای نخستین بار، روی نیمکت دبستان می‌نشیند، با دست لرزان خود، حرکت دست آموزگارش را تقلید می‌کند و شکل عددها را، روی دفترچهٔ خود می‌گذارد. اول شمردن و نوشتن از ۱ تا ۹ را یاد می‌گیرد و، بعد، با اندکی مبارزهٔ ذهنی، به تقلید خود در شمردن و نوشتن عددهای دورقمی و سه‌رقمی ادامه می‌دهد.

و همین کودک، سال‌ها بعد، وقتی با گذراندن دبستان، سال ششم یا هفتم تحصیل خود را آغاز می‌کند، تلاش ذهنی دشواری را تحمل می‌کند تا مفهوم «نقطه» و، سپس، «خط» و «سطح» را فرا گیرد و، بعد از گذراندن دوره‌هایی از درس که شامل «تعریف‌ها»، «قراردادها»، «اصل‌ها»، «قضیه‌ها» و حل یک رشته از «مساله‌ها» است، تازه می‌فهمد، چرا مساحت مستطیل را، با ضرب طول در عرض آن و مساحت دایره را با ضرب طول محیط در نصف طول شعاع آن، به‌دست می‌آورند.

ولی از یاد نبریم، وقتی کودک شش ساله پای به دبستان می‌گذارد، سرشار از «یک عمر» تجربه است. او در تمام ساعت‌ها و روزهای زندگی شش‌سالهٔ خود، در میان کسانی زندگی کرده است که به صورتی «طبیعی» و حتا بدون خواست خود، وارث تجربهٔ هزاران سالهٔ بشرند و چکیدهٔ تجربهٔ نسل‌های گذشته را به او منتقل کرده‌اند. کودک، در هر گام خود، به عدد و مقایسهٔ عددها، به شکل و کاربرد شکل‌ها برخورده است. او زمانی پای به دبستان می‌گذارد که، در واقع، عدد و شکل را کم و بیش می‌شناسد و در طول زندگی گذشتهٔ خود، بارها و بارها، و به صورت‌های گوناگون، از آن‌ها استفاده کرده است. به‌جز آموزش بی‌دریغ و پی‌گیر پدر و مادر و کسانی که دور و بر او زندگی می‌کنند، اسباب‌بازی‌ها، نقاشی‌ها، فیلم‌ها و، همچنین، طرح ساختمان‌ها، خیابان‌ها و حتا، وسیله‌های عادی زندگی، موجب شده است تا ذخیره‌ای پربار، از تجربهٔ با «عدد» و «شکل» را به‌دست آورد.

آموزگار دبستان، کاری جز این ندارد که تجربه‌های کودک را شکل بدهد و منظم کند، عنصرهای علمی این تجربهٔ ناآگاه را از ذهن او بیرون بکشد و به‌صورتی پخته و شکل گرفته در برابر او قرار دهد.

هیچ انسانی نمی‌تواند بی‌مقدمه و بدون سال‌ها کار تجربی و عملی، ریاضیات را با آغاز از مفهوم‌های مجرد «عدد»، «شکل»، «تعریف» و جز آن، یاد بگیرد.

به‌طور کلی، هیچ مفهومی نمی‌تواند بدون نوعی دستگیرهٔ مادی و ملموس، برای بشر قابل درک باشد. مفهوم عدد را در نظر بگیریم. فرض کنید، در برابر شما کسانی باشند که عددنویسی را یاد نگرفته‌اند. وقتی شما بگویید «پنج»، شنوندهٔ شما بسته به شغلی که دارد و یا بسته به موقعیت زندگی خود، «پنج درخت» یا «پنج آدم» یا «یک سکهٔ پنج تومانی» را در ذهن خود مجسم می‌کند. ولی اگر عدد «دوهزارو هفتصد و هشتاد» را بر زبان بیاورید، اولی «جنگلی از درخت»، دومی «انبوهی از آدم‌ها» و سومی «مُشتی پول» از جلو ذهن خود می‌گذراند. اکنون بیندیشید، شما عددنویسی را می‌دانید و، به احتمال قوی، وقتی گفته می‌شود «پنج»، هیچ‌کدام از آن چیزها به یاد شما نمی‌آید، آن‌چه به تندی از ذهن شما می‌گذرد، همین نماد «۵» است و وقتی که بشنوید «دوهزار و هفتصد و هشتاد»، بی‌تردید رقم‌های عدد ۲۷۸۰، از جلو ذهن شما عبور می‌کند. حقیقت این است که نه شما و نه کسی که با عددنویسی آشنا نیست، معنای درست این عدد چهاررقمی را نمی‌دانید (مگر این‌که به تصادف، در زندگی خود، بارها با آن تجربه کرده باشید)؛ و جز با تجربه یا محاسبه (که خود، نوعی تجربه است) نمی‌توانید مجسم کنید که مثلاً، برای نگه‌داری ۲۷۸۰ سوزن خیاطی به چگونه جعبه‌ای و با چه اندازه‌هایی نیاز دارید!

تنها تفاوت شما با کسی که عددنویسی نمی‌داند، این است که دستگیرهٔ قابل لمس تصور عدد را، عوض کرده‌اید. رقم‌های عدد، برای شما، همان نقش «درخت» و «آدم» را دارد. رقم‌های عدد، وسیله‌ای است که شما، به‌یاری آن، می‌توانید عدد را مجسم کنید. هر مفهوم مجرد و انتزاعی، در هر حال و به‌نحوی به دنیای قابل لمس راه پیدا می‌کند، دنیایی که قابل دیدن، شنیدن یا لمس کردن باشد و، از همین راه قابل تصور می‌شود.

آن‌چه دربارهٔ کودک گفتیم، دربارهٔ انسان هم، به معنای تاریخی آن درست است. تنها تفاوت در این است که، کودک، با تکیه بر تجربه و آگاهی دیگران

ـ که خود ذخیره‌ای از تجربه و آگاهی نسل‌های گذشته است ـ می‌تواند این مسیر را در دوره‌ای چندساله بپیماید، در حالی که انسان، برای گذشتن از این راه، به صدها و صدها سده نیاز داشته است. دانشمندی که در زمان ما می‌تواند خود را به مرزهای ناشناختهٔ دانش برساند، در چند ده سال عمر کوتاه خود، همان راهی را پیموده است که بشر، در تمامی طول تاریخ خود، توانسته است از آن بگذرد.

انسان، نخست عددشماری و عددنویسی را یاد نگرفت تا بعد، آن را در زندگی روزانهٔ خود به‌کار برد؛ اول «نقطه» و «خط» را تعریف نکرد تا بعد، از آن‌ها مستطیل بسازد و زمین‌های خود را، طبق آن، بخش‌بندی کند. درست مثل کودک، که در آغاز دستور زبان و بازشناسی فعل از فاعل را نمی‌آموزد تا بعد بتواند حرف بزند.

مفهوم‌های «عدد» و «شکل»، در مرحلهٔ تکامل‌یافته‌ای از دانش بشری به وجود آمد، وقتی که چندصد هزار سال از تجربهٔ بشر در مبارزه با طبیعت گذشته بود و ذخیرهٔ پرباری از تجربه را به دنبال داشت.

وقتی ایرانی‌ها، برای یافتن آب و آبیاری زمین‌های خشک، به کندن چاه و حفر قنات دست زدند، بی‌تردید هیچ‌کدام از روش‌های محاسبه و اندازه‌گیری و سمت‌یابی را، به اندازهٔ انسان امروزی نمی‌دانستند، ولی نیاز به آب، به تدریج و گام به گام، راه عملی کار را در طول صدها سال تجربه، به آن‌ها آموخت ... تنها نزدیک به هزار سال پیش بود که محمد کرجی، ریاضی‌دان ایرانی، توانست مجموعهٔ همهٔ این تجربه‌ها را در کتابی با نام «آب‌های زیرزمینی» گرد آورد و راه پیدا کردن «مادرچاه» را در اختیار دیگران قرار دهد.

وقتی دهقانان مصری یا بابِلی، بعد از هر طغیان رود نیل یا فرات، ناچار بودند دوباره زمین‌های حاصل‌خیز را برای کشت بین خود تقسیم کنند، هنوز از قانون‌ها و قضیه‌های هندسی آگاهی درستی نداشتند و تنها، با تکیه بر تجربهٔ نسل‌ها و به‌خاطر نیاز خود، راه‌هایی برای رفع دشواری خود پیدا کرده بودند.

به همین دلیل است که ریاضیات همهٔ ملت‌های باستانی، جدا از عمل و نیاز زندگی نیست. پیشرفت تجارت و داد و ستد، محاسبهٔ محصول کار برده‌ها و مقدار آذوقهٔ لازم برای زنده ماندن آن‌ها، ساختن شهرها و قلعه‌ها و نیایش‌گاه‌ها و محاسبهٔ مصالح و نیروی کار لازم برای آن‌ها، تجهیز و آماده کردن جنگ‌جویان چه برای تجاوز، چه برای دفاع ... این‌ها همه را می‌توان انگیزه‌های نخستینِ پیشرفت دانش دانست. نتیجه بگیریم:

> اشتباهی جدی است اگر بگوییم، در ریاضیات خالص، اندیشه تنها با آفرینش‌ها و گمان‌های خود سروکار دارد. مفهوم عدد و شکل، از جایی، جز از جهان واقعی گرفته نشده است. ده انگشت دست، که انسان شمردن یعنی نخستین عمل حساب را روی آن‌ها یاد گرفت، هر چیزی هست جز محصولی که زادهٔ خود اندیشه باشد. برای شمردن، نه‌تنها باید چیزهایی در اختیار داشته باشیم، بلکه باید این ویژگی را هم داشته‌باشیم که، ضمن بررسی این چیزها، هر خاصیت دیگری جز شمار را، از آن جدا کنیم و، این آمادگی، تنها نتیجه‌ای است از پیشرفت طولانی بغرنجی، که به آزمایش متکی باشد. مفهوم شکل هم‌مانند مفهوم عدد، تنها از دنیای خارج به‌دست آمده است، نه از مغز و اندیشهٔ خالص. پیش از آن‌که بتوان به مفهوم شکل رسید، باید چیزهایی با شکل‌های معین موجود باشد و، این شکل‌ها، با یکدیگر مقایسه شده باشند ... ریاضیات نیز، همچون همهٔ دانش‌های دیگر، از نیازهای عملی انسان، از اندازه‌گیری تکه زمین‌ها و گنجایش ظرف‌ها، از محاسبهٔ زمان و از مکانیک پدید آمده است ...

این‌که گفتیم، ریاضیات برخاسته از تجربه و نیازهای بشری است، نباید

به این معنا گرفته شود که، برای هر حکم ریاضی یا هر قضیهٔ ریاضی، می‌توان تجربه‌ای ساده یا نیازی فوری پیدا کرد.

در واقع، ریاضیات در مرحله‌ای از تکامل خود، به دستگاهی تبدیل می‌شود که برای خود، منطقی خاص و نیروی محرکهٔ خاصی پیدا می‌کند و، از این مرحله به بعد، انگیزه‌های پیشرفت ریاضیات را باید در دو عامل بیرونی و درونی خود جست‌وجو کرد. اگر ریاضیات را دستگاهی (یا سیستمی) بدانیم که، از یک طرف، خود از پیوند دستگاه‌های کوچکتری به وجود آمده است و، از طرف دیگر، زیر تاثیر دستگاه‌های نیرومند دیگری قرار دارد، باید بپذیریم که انگیزه‌های تکامل آن، هم در درون این دستگاه قرار دارد و هم در بیرون آن؛ هم حرکت‌ها، تضادها و نیروهای درونی موجب پیشرفت آن می‌شود و هم حرکت‌ها، تضادها و نیروهای بیرونی موثر بر آن.

از یک طرف، منطق و استدلال درونی ریاضیات، موجب می‌شود تا ریاضی‌دان بتواند راه‌های تازه را بگشاید و نظریه‌های تازه را بنا نهد و هم نیازهای صنعت و دانش‌های دیگر و، در تحلیل آخر، نیازهای زندگی، مساله‌های تازه‌ای را در برابر ریاضی‌دان قرار می‌دهد و حل آن‌ها را از او می‌خواهد. ولی باید توجه داشت که نتیجهٔ این دو انگیزه یکی است و، سرانجام، درستی یا نادرستی آن‌ها با معیار عمل و تجربه تایید و یا تکذیب می‌شود. به قول امیل بورل، ریاضی‌دان فرانسوی

> تنها نتیجه‌ای با ارزش است که درستی آن در عمل ثابت شده باشد. حیله‌های ظاهری، برای اثبات یک مطلب، کافی نیست.

ریاضیات از نیازهای زندگی بشر و از تجربه برخاسته است، ضمن پیشرفت خود با نظریه‌ها و شاخه‌های تازه و تازه‌تری ـ که ممکن است محصول منطق درونی ریاضیات هم باشد ـ غنی و غنی‌تر می‌شود، ولی

سرانجام، دیر یا زود، دوباره به تجربهٔ زندگی عملی بشر بازمی‌گردد و مددکار او در حرکت تکاملی انسان و سمت‌گیری او در جهت زندگی انسانی می‌شود.

همین دو انگیزه متفاوت در پیشرفت ریاضیات، موجب شده است که، سمت‌گیری ریاضیات گاه کاربردی باشد و گاه نظری. ریاضیات دوران باستان، یا ریاضیات سده‌های میانه (ازجمله در ایران) سمت‌گیری کاربردی داشته است، در حالی که ریاضیات دوران درخشان یونان باستان و یا ریاضیات بعد از سده‌های میانه، با سمت‌گیری نظری پیش رفته است. و به نظر می‌رسد که، در دوران ما، ریاضیات تغییر سمت داده و دوباره به سوی ریاضیات کاربردی گرایش پیدا کرده است. ولی این بحثی است که باید به موقع خود و در جای دیگری، به آن پرداخت.

۲. ریاضیات، دانش جزمی «دو دوتا چهارتا» نیست

ریاضیات هم، مثل هر دانش دیگری، بازتاب‌دهندهٔ جنبه‌ای از شناخت آدمی است. انسان، قانونی اختراع نمی‌کند، بلکه قانون‌های موجود، قانون‌هایی را که بر طبیعت و جامعه حاکم است، کشف می‌کند. به هر اندازه، در کشف این قانون‌ها و گشودن رازهای موجود در طبیعت و جامعه جلوتر رود، از شناختی بالاتر برخوردار می‌شود. چه طبیعت و چه جامعه، به اندازهٔ کافی بغرنج‌اند و به سادگی نمی‌توان به رازهای معماگونهٔ درون آن‌ها پی برد. تنها تجربهٔ طولانی نسل‌های متوالی، همراه با آزمایش و تفکر، توانسته است بخش ناچیزی از این قانون‌ها را آشکار سازد. هرچه رازهای بیشتری از طبیعت و جامعه شناخته شود، زبونی بشر در برابر نیروهای قهار طبیعت کمتر می‌شود و راه رسیدن به زندگی بی‌دغدغه و آرام انسانی را بهتر درک می‌کند. نباید انتظار داشت که ریاضیات، به‌عنوان جزئی از شناخت آدمی، از این قاعده جدا باشد. ریاضیات هم، مثل هر دانش دیگری راه کمال را می‌پیماید و در هر گام، نسبت به گام قبل، کاراتر و فراگیرتر می‌شود. برای روشن شدن مطلب، آوردن یکی دو نمونه به ما یاری می‌رساند.

در مصر و بابل کهن، حتا در بسیاری از کتاب‌های نخستینِ ریاضی‌دانان ایرانی، برای محاسبهٔ مساحت هر چهارضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را، در نصف مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر ضرب می‌کردند. این قاعده، دشواری زیادی برای آن‌ها ایجاد نمی‌کرد، زیرا زمین‌ها، به خودی خود و به‌صورت تقریبی، مستطیل شکل درمی‌آمدند و، این قاعده، برای محاسبهٔ مساحت مستطیل درست بود. آن‌ها، برای محاسبهٔ مساحت شکل‌های دیگر، قاعدهٔ مشخصی نداشتند و با روش‌های تقریبی عمل می‌کردند. برای محاسبهٔ مساحت دایره، عدد π را برابر ۳ می‌گرفتند و مساحت شکل‌های دیگری را، که در پیرامون خود، خط‌های خمیده داشتند، قابل محاسبه نمی‌دانستند. هزاران سال طول کشید تا، در سده‌های نزدیک به ما، قاعدهٔ محاسبهٔ مساحت شکل‌ها، در یونان باستان پیدا شد و برای عدد π هم، مقدار دقیق‌تری، در حدود $\frac{۲۲}{۷}$، به‌دست آمد، همچنین، برخی ویژگی‌های منحنی‌های دیگری مثل بیضی و سهمی شناخته شد.

ولی برای حل کم‌وبیش کامل مساحت‌ها، لازم بود تا سدهٔ هِفدهم میلادی انتظار کشید تا، سرانجام، به‌یاری «انتگرال‌گیری»، به نتیجه‌ای قطعی‌تر برسد. ولی بحث مربوط به مساحت‌ها، هنوز هم ادامه دارد و هر روز با کشف قانونی تازه، دقیق‌تر و جامع‌تر می‌شود.

مثال بسیار روشن دیگر، بحث مربوط به قانون‌های هندسی حاکم بر فضا است. هندسهٔ اقلیدسی را همهٔ ما می‌شناسیم، ما نخستین تعریف‌ها و اصل‌ها و قضیه‌ها را، با قانون‌های موجود در این هندسه یاد گرفته‌ایم.

تا زمانی که کار هندسه، اندازه‌گیری و محاسبهٔ فاصله‌های نزدیکی در حدود سطح زمین و فضای نزدیک دوروبر آن بود، هیچ‌گونه دشواری در این هندسه نبود و هیچ‌کس در درستی حکم‌های آن شک نمی‌کرد. عمل، درستی همهٔ این محاسبه‌ها را تایید می‌کرد. ولی همین‌که «فضای دید» بشر گسترش بیشتری یافت و مسالهٔ اندازه‌گیری و محاسبه، با مقیاس فاصلهٔ بین

ستارگان ثابت و، سپس کهکشان‌ها به میان آمد، دیگر هندسهٔ اقلیدسی نیروی سابق خود را از دست داد و هندسه‌ای عام‌تر و جامع‌تر جای آن را گرفت. معلوم شد که مثلاً، مجموع زاویه‌های یک مثلث، برخلاف آنچه در هندسهٔ اقلیدسی گمان می‌رفت، تنها در یک حالت خاص برابر ۱۸۰ درجه است و، در حالت‌های کلی، می‌تواند کمتر یا بیشتر از آن باشد. معلوم شد، فضای بی‌کران فیزیکی ما، دارای چنان ویژگی است که نمی‌تواند خط راست را بپذیرد و، درست همان‌طور که هر خطی روی کره رسم شود، به‌ناچار خطی خمیده از آب درمی‌آید، در فضای فیزیکی ما هم، همهٔ خط‌ها، دارای انحنا هستند. ولی میزان این انحنا آن‌قدر کم است که برای فاصله‌هایی، در حدود فاصله‌های درون منظومهٔ خورشیدی، نیازی به در نظر گرفتن آن نیست. بحث مربوط به فضا و زمان و قانون‌های هندسی حاکم بر آن، هنوز هم ادامه دارد.

مثال ساده‌تری بیاوریم. در کتاب مشهور «مقدمات» اقلیدس، اصلی وجود دارد که می‌گوید: «هر کل، از جزء خود بزرگتر است». این «اصل» چنان بدیهی به نظر می‌رسید که کسی کمترین تردیدی دربارهٔ درستی آن نداشت. «هر کل از جزء خود بزرگتر است»، به عنوان اصلی شناخته شده بود که بر تمام جهان هستی حاکم است. ولی امروز می‌دانیم، این اصل، تنها وقتی درست است که با مجموعه‌های محدود و باپایان سروکار داشته باشیم. وقتی دربارهٔ «تعداد» عضوهای مجموعه‌های بی‌پایان صحبت می‌کنیم، این اصل درستی خود را از دست می‌دهد. به عنوان نمونه، روشن است که مجموعهٔ عددهای زوج مثبت، زیرمجموعه، یعنی جزئی از مجموعهٔ عددهای طبیعی است. اکنون عضوهای این دو مجموعه را، در دو سطر، به‌ترتیب زیر هم می‌نویسیم، در سطر اول عددهای زوج و در سطر دوم، عددهای طبیعی:

۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	...
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...

برای هر عدد زوج، یک عدد طبیعی و، برعکس، برای هر عدد طبیعی، یک

عدد زوج وجود دارد. مثلاً عدد زوج ۲۵۲۶ متناظر با عدد طبیعی ۱۲۶۳ و عدد طبیعی ۱۰۱۳ متناظر با عدد زوج ۲۰۲۶ است. هیچ عدد زوجی پیدا نمی‌شود که نظیری در عددهای طبیعی نداشته باشد و برعکس. اگر به تعداد عددهای طبیعی، جعبه داشته باشیم و بخواهیم، هر عدد زوج را در یکی از آن‌ها قرار دهیم، هیچ جعبه‌ای بدون عدد باقی نمی‌ماند و، برعکس، هیچ عدد زوجی هم، بدون جعبه نمی‌ماند. در ریاضیات می‌گویند، عضوهای مجموعهٔ عددهای زوج مثبت، با عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، در **تناظر یک‌به‌یک** هستند. به این ترتیب، نه تعداد عددهای طبیعی از تعداد عددهای زوج بیشتر است و نه، برعکس، تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای طبیعی بیشتر است؛ **تعداد عددهای زوج مثبت، با تعداد همهٔ عددهای طبیعی برابر است.** بنابراین، اصل اقلیدس باید اصلاح شود و به این صورت درآید: «در مجموعه‌های متناهی و باپایان، هر کل از جزء خود بزرگتر است».

ریاضیات وجودی زنده است و، مثل هر وجود زندهٔ دیگری، هیچ چیز ثابت و جاودانی در آن پیدا نمی‌شود. ریاضیات، همراه با شناخت آدمی رشد می‌کند:

همان‌طور که درخت بلوط، ضمن رشد نیرومند خود، شاخه‌های کهن را به‌وسیلهٔ لایه‌های تازه‌ای می‌پوشاند، شاخه‌های تازه به بار می‌آورد، به سمت بالا قد می‌کشد و به‌سوی پایین ریشه می‌دواند، ریاضیات هم، در پیشرفت خود، نکته‌های تازه‌ای به شاخه‌های موجود می‌افزاید، شاخه‌های تازه‌ای می‌آفریند، به‌سوی قله‌های تازهٔ انتزاع بالا می‌رود و در «اصل‌های» خود ژرف‌تر می‌شود . . . پیشرفت ریاضیات، تنها به این‌جا نمی‌رسد که قضیه‌های تازه را، به‌طور ساده، روی هم انبار کند، بلکه منجر به تغییرهای اساسی و کیفی در ریاضیات می‌شود . . .

از فصل اول «ریاضیات، محتونی و روش آن»

جزمی نبودن ریاضیات را، از جنبهٔ دیگری هم می‌توان به روشنی احساس کرد. در حل مساله‌های ریاضی، یا در بیان حکم‌ها و حتا تعریف‌های موجود، ناچاریم به شرط‌ها و موقعیت‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم، توجه کنیم. به این پرسش، چه پاسخی می‌دهید که: x بزرگتر است یا $\frac{1}{x}$؟ شما چاره‌ای جز پاسخ مشروط ندارید: اگر x عددی حقیقی باشد، در آن صورت، به شرط $x > 1$ یا $-1 < x < 0$، مقدار x از مقدار $\frac{1}{x}$ بزرگتر است؛ ولی اگر داشته باشیم $0 < x < 1$ یا $x < -1$، آن‌وقت مقدار $\frac{1}{x}$ از مقدار x بزرگتر است؛ در دو حالت $x = 1$ و $x = -1$، مقدار x با مقدار $\frac{1}{x}$ برابر است. در حالت $x = 0$ یا وقتی x عددی حقیقی نباشد، پرسش «x بزرگتر است یا $\frac{1}{x}$»، بی‌معنا می‌شود.

دربارهٔ جواب معادلهٔ $2x - 1 = 0$ هم، باید پاسخ مشروط داد: اگر x را متعلق به مجموعهٔ عددهای گویا (یا مجموعهٔ عددهای حقیقی) بدانیم، جواب معادله برابر $\frac{1}{2}$ است، ولی اگر x متعلق به مجموعهٔ عددهای درست باشد، این معادله جواب ندارد.

برای درک مثال بعدی، به مقدمه‌ای کوتاه نیاز داریم. هر دو عدد ۵ و ۲۵ (یعنی 5^2)، به رقم ۵ ختم می‌شوند. همچنین، هر دو عدد ۲۵ و ۶۲۵ (یعنی 25^2) به دو رقم ۲۵ ختم می‌شوند. عددهای ۶۲۵ و $625^2 (= 390625)$ به ۶۲۵ ختم می‌شوند. اگر کار را ادامه دهیم، متوجه می‌شویم هر دو عدد ۳۹۰۶۲۵ و 390625^2، به ۹۰۶۲۵ ختم می‌شوند و غیره. در عمل بعد، رقم‌های مشترک سمت راست برابر ۸۹۰۶۲۵ و، در مرحلهٔ بعد، برابر ۲۸۹۰۶۲۵ می‌شوند. بنابراین داریم:

$$a = \left(\left(\left(5^2\right)^2\right)^2\right)^{2^{\cdots}} = \ldots 2890625$$

اگر از رقم‌های سمت راست جلو بیاییم و اگر تعداد رقم‌ها را بی‌پایان فرض کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که عددهای a و $a^۲$ با هم برابرند؛ یعنی a، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ = x$ است.

رقم‌های عدد a را از راست به چپ، تا هرجا بخواهیم، می‌توانیم به دست آوریم، ولی البته هرگز به انتهای سمت چپ عدد نمی‌رسیم، به همین دلیل، می‌توان این عدد را، که تعداد رقم‌های آن بی‌پایان است، «بی‌آغاز» نامید.

عدد «بی‌آغاز» دیگری هم وجود دارد که در معادلهٔ $x^۲ = x$ صدق می‌کند که، البته، پیدا کردن آن اندکی دشوارتر است و، در این‌جا، از تفضیل دربارهٔ آن می‌گذریم

$$b = \ldots ۷۱۰۹۳۷۶$$

به این ترتیب، اگر جواب‌های معادلهٔ $x^۲ = x$ را در مجموعه‌ای در نظر بگیریم که شامل عددهای بی‌آغاز هم بشود، آن‌وقت برای معادلهٔ درجه دوم $x^۲ = x$، چهار جواب به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = ۰,\ x_۲ = ۱,\ x_۳ = a,\ x_۴ = b$$

آیا این وضع، قانون اصلی جبر را نقض می‌کند که می‌گوید: تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + cx + d = ۰$$

(a، b، ...، c و d، عددهایی حقیقی‌اند) از n تجاوز نمی‌کند؟ چه شد که معادله‌ای درجه دوم (که باید حداکثر دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد)، چهار ریشهٔ حقیقی پیدا کرد؟ و این تازه، مربوط به دستگاه عددشماری دهدهی است و اگر دستگاه‌های عددشماری دیگری را در نظر بگیریم، باز هم به ریشه‌های دیگری برخورد می‌کنیم.

در واقع، قانونی از جبر ـ که در بالا از آن یاد کردیم ـ مربوط به مجموعه‌ای از عددهای حقیقی است که، هر عضو آن، عددی معین و محدود باشد و، به‌طور طبیعی، اگر این مجموعه را گسترش دهیم، نباید منتظر باشیم که، این قانون، به قوت خود باقی باشد.

هیچ قانونی، در ریاضیات، ثابت و پایدار نیست و، درستی آن، به شرط‌هایی بستگی دارد که این قانون را به‌وجود آورده‌اند.

۳. پیشرفت ریاضیات، به‌ویژه در دوران باستان، مسیری هموار نداشته است.

سندهای بسیاری وجود دارد، مبنی بر این‌که بسیاری از تمدن‌های باستانی، در مرحله‌هایی از تاریخ خود، به مرزی از دانش رسیده بودند که موجب شگفتی می‌شود. این شگفتی وقتی بیشتر می‌شود که می‌بینیم، در مرحله‌های بعدی، نه‌تنها دنبال کار گرفته نشده، بلکه به‌تدریج گذشتهٔ خود و دست‌آوردهای گذشتگان خود را از یاد برده‌اند.

در مصر باستان، از قانون‌های اهرم، سطح شیب‌دار، قرقره و چرخ استفاده می‌کردند. شواهدی وجود دارد که، درهای برخی از پرستش‌گاه‌های آن‌ها، در تاریخی نزدیک به سه‌هزار سال پیش، به طور خودکار باز و بسته می‌شده است. در سرزمین بابل، نزدیک به پنج‌هزار سال پیش، روش تصفیهٔ نفت خام را می‌دانستند و از نفت سفید، قیر و برخی فراورده‌های دیگر آن استفاده می‌کردند. در دهلی، در یکی از پرستش‌گاه‌های کهن، ستونی وجود دارد که از آهن خالص است، حتا برای تیرهای برخی از سقف‌های این پرستش‌گاه از همین آهن استفاده شده است. درجهٔ خالص بودن این آهن، ۹۹/۷ درصد است که حتا امروز هم تهیهٔ آن آسان نیست. در ایران، از دوره‌های بسیار باستانی از گاه‌شماری خورشیدی استفاده می‌کردند، زمین را کروی می‌دانستند و، به روایت تاریخ‌نویسان یونانی و رومی، در دورهٔ هخامنشیان، انحنای زمین را اندازه گرفتند.

و اما دربارهٔ ریاضیات، وضع از این هم حیرت‌آورتر است. ریاضیات یونانی، از سده‌های هفتم و ششم پیش از میلاد به اوج خود می‌رسد و در سده‌های چهارم و پنجم بعد از میلاد به زوال خود نزدیک می‌شود. یونانی‌ها، هندسه را تا درون هندسهٔ عالی پیش بردند و به برخی از قضیه‌های هندسهٔ عالی هم دست یافتند. ولی باید سده‌های بسیار می‌گذشت تا دنبال کار آن‌ها، از سده شانزدهم میلادی به بعد، گرفته شود. آپولونیوس، در سدهٔ سوم پیش از میلاد، کتابی دربارهٔ ویژگی‌های مقطع‌های مخروطی نوشت، ولی نه کسی از آن استفاده کرد و نه کسی دنبال کار او را گرفت، تا این‌که در سدهٔ شانزدهم از زیر خاک درآمد و به‌وسیلهٔ پاسکال، ریاضی‌دان فرانسوی، تنظیم و تکمیل شد. ارشمیدس، در سدهٔ سوم پیش از میلاد، به طرح نخستین محاسبهٔ انتگرالی رسید و به یاری آن، به عنوان نمونه، مساحت یک قطعه سهمی را به‌دست آورد، ولی باز هم باید نزدیک به دو هزار سال انتظار کشید تا روش کار او دوباره طرح و تکمیل شود. چهارضلعی‌هایی که خیام، در سدهٔ دهم میلادی طرح کرده و، در واقع، به یاری آن‌ها، پایه‌های هندسهٔ نااقلیدسی را گذاشته بود، تنها در سدهٔ نوزدهم به ثمر رسید و به‌وسیلهٔ لباچوسکی، بایای، گوس و سپس ریمان، دنبال شد.

چرا چنین است؟ اگر پیشرفت دانش، قانون‌مند است و اگر به تکامل دایمی دانش اعتقاد داریم، چرا گاهی توقف‌ها و یا حتا عقب‌نشینی‌ها، در آن دیده می‌شود؟ چرا پیشرفت دانش، به‌ویژه در دوران باستان، راهی هموار نداشته است و چرا برخی کشف‌ها و اختراع‌ها دنبال نمی‌شده است؟

اگر بخواهیم به همهٔ این پرسش‌ها، پاسخ بدهیم، بحث را بسیار دراز می‌کند و نمی‌توانیم در چند صفحه از عهدهٔ آن برآییم. امید داریم که بتوانیم در جلدهای بعدی «ریاضیات محاسبه‌ای»، دست‌کم به برخی از آن‌ها بپردازیم. در این‌جا، تنها به ناهمواری مسیر پیشرفت ریاضیات در دوران باستان اشاره می‌کنیم و از کنار پرسش‌های دیگر می‌گذریم.

یادآوری می‌کنیم که دانش، باید با نظام اجتماعی و نظام زندگی موجود سازگار باشد. در دوران اقتصاد سادهٔ برده‌داری، نمی‌توان انتظار صنایع بزرگ و تخصص‌ها و دانش‌های مربوط به آن را داشت و یا در شرایط خاص اجتماعی ایران گذشته، نمی‌توان انتظار داشت، دنباله کتاب «موسیقی‌الکبیر» ابونصر فارابی گرفته شود و موسیقی ایرانی، راه اعتلای خود را، به صورتی هموار و بی‌دغدغه، بپیماید.

به‌جز این، جنگ‌ها و هجوم‌های دایمی را، که از ویژگی‌های نظام‌های گذشته است، نباید از یاد ببریم. به عنوان مثال، در دوران برده‌داری، نیروی کار لازم را از راه گرفتن اسیرها تهیه می‌دیدند و، درضمن، با غارت منابع سرزمین‌های مغلوب، صاحب مال و ثروت می‌شدند. جنگ‌ها و ویران‌گری‌ها را، باید مانعی بزرگ در راه پیشرفت دانش و حفظ میراث فرهنگی گذشته دانست. این جنگ‌ها و هجوم‌های پشت سر هم، نه‌تنها بی‌ثباتی به وجود می‌آورد و آرامشی را که برای پیشرفت دانش لازم است، از بین می‌برد، گاه تمامی یک تمدن و یک ملت را به نابودی می‌کشید و تمامی دست‌آوردهای گذشتهٔ آن را دفن می‌کرد.

انحصاری بودن دانش در دست عده‌ای خاص هم، می‌تواند عاملی برای گسترش نیافتن آن و فرو رفتن آن در مسیرهای خاص و تنگ‌نظرانه باشد. دانش، جنبه‌ای رمزگونه داشت و نمی‌گذاشتند همگانی شود و، درنتیجه، با اندک پیش‌آمدی، همراه با صاحبان اندک آن، نابود می‌شد.

بدون این‌که از این علت‌ها و علت‌های دیگر مشابه آن‌ها چشم بپوشیم، به برخی علت‌های خاصِ ناهمواری پیشرفت ریاضیات باستان اشاره می‌کنیم و، با آوردن دو نمونهٔ تاریخی و یک بحث کلی، تلاش می‌کنیم، تا حد زیادی، موضوع را روشن کنیم.

۱) در حدود چهارهزار سال پیش از میلاد، یعنی شش‌هزار سال پیش، در سرزمین‌های عیلام (جنوب و جنوب‌غربی ایران کنونی) و بابِل (در عراق

کنونی، جایی که به «میان دو رود» یا «بین‌النهرین» مشهور شده است) تمدن‌هایی وجود داشت که تا اندازهٔ زیادی، شگفتی‌آور است.

بابِلی‌ها، عددها را، کم‌وبیش با همان روش امروزی (یعنی با استفاده از موضعی بودن رقم‌ها) می‌نوشتند و، در مرحله‌ای از تکامل خود، نمادی هم برای صفر در نظر می‌گرفتند (چیزی که هزاران سال بعد دوباره به‌وسیلهٔ هندی‌ها کشف شد). نزدیک به پانزده سده پیش از فیثاغورث، از حالت‌های خاص قضیه‌ای که به نام فیثاغورث مشهور است، اطلاع داشتند، توان عددها را به کار می‌بردند و برای جذر و کعب عددها، جدول‌هایی تنظیم کرده بودند. بسیاری از معادله‌های درجه دوم، درجه سوم و دومجذوری را حل می‌کردند و . . . تقسیم‌بندی امروزی محیط دایره به ۳۶۰ درجه، تقسیم‌بندی شبانه‌روز به ۲۴ ساعت و تقسیم ساعت به ۶۰ دقیقه و غیره، که امروز در همه‌جای دنیا استفاده می‌شود، از یادگارهای مردم باستانی «میان دو رود» است.

ولی شما در نوشته‌های ریاضی که از مردم بابل باقی مانده است، به استدلال برنمی‌خورید. در هیچ‌جا، کوچکترین تلاشی برای قانع کردن خواننده نشده است. همه‌جا «فرمان» داده شده است که «چنین کن و چنین به‌دست آور». نظام برده‌داری «دولتی ـ دینی» و حاکمیت مستبد و خشن موجود در آن زمان، در شیوهٔ آموزش ریاضی هم اثر گذاشته است. در سرزمینی که هرچه فرمان‌روایان و کاهنان می‌گفتند، باید بی چون و چرا اجرا می‌شد و هرگونه پرسش و مقاومت در برابر ارادهٔ «بزرگان»، جرم محسوب می‌شد و مجازات اعدام داشت، در نظامی که روح تحکم و فرمان‌دهی از بالا، و تعبد و فرمان‌بری از پایین، امری بدیهی به شمار می‌رفت، در جامعه‌ای که جز تسلیم و رضا در برابر صاحبان زور و قدرت، چاره‌ای نبود و اندک تخلف از آن، برابر با نابودیِ حتا تمامی خانواده می‌شد، طبیعی است که آموزش ریاضی هم نمی‌توانست روشی خلاف قاعده مرسوم داشته باشد.

ولی طبیعی است، چنین روش شکننده‌ای در آموزش ریاضی، با اندک

حادثه‌ای، می‌تواند تمامی دست‌آوردهای گذشته را بر باد دهد و یا، حتا در شرایط عادی هم، بسیاری از آگاهی‌ها را، به‌دلیل رمزگونه بودن آن‌ها، از یادها ببرد.

یادآوری این مطلب ضروری است که این وضع، خاص بابِلی‌ها نبود و، به تقریب، یکی از ویژگی‌های دانش در تمامی دنیای کهن به شمار می‌رفت.

۲) به نمونه‌ای متفاوت، یعنی ریاضیات یونان باستان توجه کنیم. در نظام اجتماعی یونان باستان، نوعی «دموکراسی» وجود داشت. البته، نظام اجتماعی یونان هم در اساس خود، نظامی بر پایهٔ کاربرده‌ها و، بنابراین، «دموکراسی» خاص آزادها بود. برده‌ها هیچ حقی نداشتند و، بنابراین، از «دموکراسی» موجود، سهمی نمی‌بردند. برده‌ها، انسان به شمار نمی‌آمدند و، درنتیجه، «آزادهای» یونان، آن‌ها را عضو جامعهٔ یونانی نمی‌دانستند.

این وضع، در جهتی که با بحث ما بستگی دارد، دو نتیجه به بار آورد:

اول، به دلیل این‌که کارهای جسمی و عملی، خاص برده‌ها بود و «آزادها»، کار عملی را ناپسند می‌شمردند و تنها تفکر و دانش را در شأن خود می‌دانستند، تنها دانش‌هایی رونق گرفت که جنبهٔ عملی و کاربردی کمتری داشتند. ارسطو می‌گفت:

> دانشی بر دیگر دانش‌ها برتری دارد که انگیزهٔ بیرونی نداشته باشد.

یعنی تنها از ذهن و «تفکر» برخاسته باشد و نتوان در زندگی و عمل به آن برخورد. کارهای عملی و روزمَره را، برده‌ها انجام می‌دادند و «آزادها» به بحث و مجادله دربارهٔ قانون‌های حاکم بر کاینات می‌پرداختند. حتا برخی از صاحبان اندیشه، که اعتقاد به بردن مساله‌های فلسفی و علمی به دورن مردم عادی (و البته، هنوز نه برده‌ها) داشتند، از طرف فیلسوفان مبلغ اشرافیت، نام «سوفسطائی» را دریافت کردند که، در زبان فارسی، به «سفسطه‌گران» تعبیر شده است.

چنین بود که فلسفه و ریاضیات، در مرکز توجه دانشمندان یونانی قرار گرفت، البته آن بخش از ریاضیات که کاربرد عملی نداشت و، در این میان، هندسه دانشی ممتاز به شمار می‌رفت؛ چراکه به نظر می‌رسید، مساله‌های انتزاعی هندسه، نمی‌توانند کاربردی در عمل داشته باشند. می‌دانید که افلاطون هم، با آن که هندسه‌دان بزرگی نبود، بر سردر آکادمی خود نوشته بود: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود».

از میان دانشمندان یونانی، تنها استثناهایی پیدا می‌شوند که در زمینهٔ کشف قانون‌های فیزیکی و یا پیش‌برد حساب (که گمان می‌رفت تنها به درد محاسبه‌های عملی ـ که کاری ناپسند است ـ می‌خورد) تلاش کرده باشند. برجسته‌ترین این استثناها، ارشمیدس است که گویا، دورانی از زندگی خود را به بردگی گذرانده و سپس آزاد شده بود.

این بود که هندسه‌دانان یونانی، برجسته‌ترین دانشمندان آن زمان‌اند و، به همین دلیل، هندسهٔ یونانی توانست گام به درون مرزهای هندسهٔ عالی بگذارد، در حالی که حساب، جز پیشرفت اندکی نداشت و جبر به وجود هم نیامد. یونانیان حتا در عددنویسی، در همان مرحله‌های ابتدایی باقی ماندند و این درحالی بود که «مقدمات» اقلیدس و «مخروطات» آپولونیوس آفریده شده بود.

دوم، وجود همین «دموکراسی» نارسا و محدود یونانی موجب شد تا، برخلاف ملت‌های باستانی دیگر، روح منطق و استدلال بر ریاضیات یونانی حاکم شود، تا آن‌جا که کتاب عظیم اقلیدس پدید آمد که، به تقریب، همان چیزی است که امروز هم، هندسه‌های دبیرستانی را، با روش آن تنظیم می‌کنند. یکی از دلیل‌هایی که موجب شد، تا منطبق و استدلال بتواند راه رشد خود را در یونان باستان بیابد، آن بود که جامعهٔ باستانی یونان آن روزگار، از آزادی نسبی، دست‌کم برای عده‌ای از مردم، برخوردار بود.

آن‌چه دربارهٔ بستگی نظام‌های اجتماعی و پیش‌آمدهای سیاسی با پیشرفت نظریه‌های علمی، و ازجمله ریاضیات گفتیم، نباید این سوءتفاهم را به‌وجود

آورد که می‌توان تاریخ دانش و ازجمله تاریخ ریاضیات را، به همان دوره‌های مربوط به تقسیم نظام‌های اقتصادی و اجتماعی تقسیم کرد و، مثلاً، از ریاضیات دوران بردگی یا ریاضیات دوران سرمایه‌داری صحبت کرد. پیشرفت دانش، قانون‌های خاص خودش را دارد و، نظام‌های اقتصادی و اجتماعی، تنها به عنوان یکی از عامل‌های موثر در جریان‌های فکری و علمی، می‌تواند بر روند حرکت دانش، کاربردهای آن و، به‌ویژه، در روش‌های آموزشی و تفسیرهای فلسفی اثر بگذارد.

□

در همین بررسی کوتاه، نکتهٔ دیگری هم روشن می‌شود: برخلاف تصور عده‌ای، همه چیز از یونان آغاز نشده است. این درست است که گاه ملتی یا قومی، در شرایطی خاص، امکان بروز نسبی استعدادهای خود را پیدا می‌کند و، برای دورانی، درخششی چشم‌گیر نشان می‌دهد؛ ولی این نتیجه‌گیری به طور قطع نادرست است که ملتی بر دیگر ملت‌ها برتری دارد و یا، بدتر از آن، ملتی به تنهایی توانسته است، آبشخور فلسفی، علمی و هنری تمامی جهان باشد. همهٔ ملت‌ها، سهم خود را در تاریخ به‌جا گذاشته‌اند و همیشه، با انتقال دانش از جایی به جای دیگر و برخورد اندیشه‌ها در میان ملت‌ها و قوم‌های دور و نزدیک، جریان‌های اندیشه‌ای نیروی بیشتری گرفته‌اند و با سرعت بیشتری وارد زندگی و عمل شده‌اند.

نتیجهٔ دیگری که از این بحث به دست می‌آید، این است که از ریاضیات نباید توقع بیش از اندازه داشت.

امروز ریاضیات به ابزار نیرومندی برای همهٔ دانش‌ها تبدیل شده است. ریاضیات حتا در دانش‌هایی که به کلی دور از آن به نظر می‌آمدند، مثل روان‌شناسی، جامعه‌شناسی، زبان‌شناسی، پزشکی و غیر آن، نفوذ کرده است

و، به‌ویژه، نوع استدلال ریاضی و روش‌های ریاضی، به معیاری برای ارزیابی دقت و درستی این دانش‌ها تبدیل شده است.

ولی این وضع، به معنای آن نیست که هر کاری از ریاضیات ساخته است و می‌تواند، به نحوی، جانشین سایر دانش‌ها شود. زمانی لایب‌نیتس، ریاضی‌دان و اندیشمند سدهٔ هفدهم، گمان می‌کرد که می‌توان قانونی یا رابطه‌ای ریاضی پیدا کرد که بتواند تمامی دشواری‌های موجود را شرح دهد، ولی طبیعی بود که نتواند به چنین رابطه یا قانونی دست یابد.

برای ارزیابی نیروی ریاضیات، باید به دو نکته توجه داشت:

اوّل، ریاضیات بخشی از شناخت آدمی را تشکیل می‌دهد و، بنابراین، همراه با تکامل شناخت پیش می‌رود. پیش از این هم گفتیم، ممکن است ریاضیات، در دوره‌ای و تا حدی، از شناخت آدمی، به معنای اعم آن، یعنی از تجربه و زندگی علمی و اندیشه‌ای، جلو بیفتد، ولی این جلوافتادگی محدود و موقت است و هرگز نمی‌تواند به طور کلی، خود را از مجموعهٔ شناخت آدمی جدا کند.

همین پیروی ریاضیات از شناخت آدمی، موجب می‌شود تا کارآیی و توانایی آن را محدود کند. تکامل نظریه‌های ریاضی و دقیق‌تر شدن آن‌ها، بستگی جدی به شناخت کلی انسان از جهان خارج دارد و، از آن‌جا که آگاهی از جهان بیرون، همیشه محدود و تقریبی است، توان و کاربرد ریاضیات هم، محدود و تقریبی باقی می‌ماند. هرچه شناخت آدمی از جهان بیرون، به حقیقت نزدیک‌تر شود، قانون‌ها و نظریه‌های ریاضی هم دقیق‌تر و کاراتر می‌شوند. هرگز زمانی فرا نمی‌رسد که نظریه‌های ریاضی، دارای دقت مطلق و کارآیی مطلق باشند. همیشه یک نظریهٔ ریاضی، با شرط‌هایی، دقیق است و در اوضاع و احوال خاصی کاربرد دارد.

دوم، ریاضیات تنها جنبه‌ای از شناخت را تشکیل می‌دهد، نه همهٔ آن را، ریاضیات، مثل هر دانش دیگری، تنها در بستگی با سایر دانش‌ها می‌تواند

معنا و مفهوم پیدا کنند. همان‌طور که تنها با شناختن وزن، وزن مخصوص، قابلیت کشش و ویژگی‌های دیگر فیزیکی یک جسم، نمی‌توان آن را، به صورتی جامع و کامل شناخت، همان‌طور هم تنها با توجه به ویژگی‌های ریاضی یک جسم، مثل شکل، اندازه، تبدیل‌پذیری و خاصیت‌های توپولوژی آن، نمی‌توان جامعیت آن جسم را درک کرد. به‌جز این، برای به کار گرفتن ریاضیات، باید توجه کرد که در کجا و به چه قصدی از آن استفاده می‌کنیم، در غیر این صورت و تنها استفاده از قانون‌های خالص ریاضی، ممکن است ما را به گمراهی بکشاند.

به عنوان نمونه، برابری ریاضی $۱ = \frac{۱}{۳} \times ۳$ را نمی‌توان دربارهٔ تکه الماسی که به سه بخش برابر تقسیم شده است، به کار برد؛ چرا که سه تکهٔ جداگانهٔ آن، ارزش یک تکهٔ به هم پیوستهٔ آن را ندارد. همچنین از برابری $۲۰ = ۱۰ + ۱۰$، نمی‌توان برای مخلوط کردن آب و الکل استفاده کرد، چراکه اگر ۱۰ لیتر آب را با ۱۰ لیتر الکل مخلوط کنیم، به جای ۲۰ لیتر، ۱۹ لیتر آب و الکل به دست می‌آوریم.

حتا در خود ریاضیات هم، کاربرد اصل‌ها و قضیه‌ها و رابطه‌ها، اغلب با شرط‌هایی همراه است. مثال «هر کل، از جزء خود بزرگتر است» را، پیش از این دیدیم، ولی نمونه‌های ساده‌تری را هم می‌توان آورد.

آیا با در دست داشتن سه زاویه از مثلث، می‌توان طول ضلع‌های آن را به دست آورد؟ در پاسخ، باید گفت: در هندسهٔ اقلیدسی نه، ولی در هندسهٔ لباچوسکی یا در مثلث کروی بله!

ریاضیات، نه در قانون‌ها و قضیه‌های خود، و نه در روش‌ها و شیوه‌های درونی و کاربردی خود، نیروی مطلق ندارد و توان آن، بستگی به مجموعهٔ توان آدمی در شناخت از جهان دارد.

۴. آیا انسان‌های نخستین، وحشی و آدمخوار بوده‌اند؟

استخوانی از یک ماده گرگ، مربوط به قریب ۳۰۰۰۰ سال پیش، در

شمال اروپا (در چک) پیدا شده است که روی آن، رشته‌ای شامل ۵۵ برش وجود دارد. این برش‌ها در دو ردیف و در گروه‌های پنج‌تایی، به‌طور منظم قرار گرفته‌اند.

برش‌ها، کار دست انسان آن روزگار است و نشان می‌دهد که، با این روش، خواسته‌اند نوعی صورت حساب را نگه‌داری کنند. درضمن، در این «محاسبهٔ» ابتدایی، مقدمات نخستین عددشماری در مبنای ۵ آماده شده است (به یاد بیاوریم، هر دست انسان، پنج انگشت دارد).

داروین می‌گوید، برای کار ذهنی، به‌ویژه ریاضی، دو عامل اصلی لازم است: حافظه و تصور. و انسان نخستین، این دو عامل ضروریِ استدلال ریاضی را در اختیار داشت. باستان‌شناسی نشان می‌دهد که ریاضیات (به معنای مقدماتی آن)، نقاشی و موسیقی، همیشه و از همان آغاز، با بشر همراه بوده است. و چگونه می‌توان تصور کرد که انسان، انسانی که همیشه به صورت جمعی زندگی می‌کرد، انسانی که تصور و حافظه داشته و انسانی که اثرهای هنری بدیعی از خود به یادگار گذاشته است، تمایل به آدم‌خواری داشته باشد؟

حقیقت این است که نظریه‌پردازان جهان سرمایه‌داری، به قصد تحقیر انسان و به قصد پرده‌پوشی جنایت‌ها، آدم‌کشی‌ها و ویران‌گری‌های سردمداران خود، و به منظور محکم کردن اندیشه‌های نژادپرستانه، به این تحریف تاریخی دست زده‌اند. باید به نحوی قتل‌عام «آزتک‌ها» و «اینکاها»، مردم بومی سرزمین امریکا را و نابودی کامل تمدن آن‌ها را به دست جنایت‌کاران حرفه‌ای اروپایی، توجیه کرد. باید به بردگی کشاندن میلیون‌ها سیاه‌پوست افریقایی را، از نظر تاریخی، قابل قبول جلوه داد. باید به نظریهٔ ضد انسانی جدایی نژادی، جدایی قومی، جدایی اندیشه‌ای، لباس دانش پوشاند.

حقیقت این است، از زمانی که بشر پای به جامعه‌ای نابرابر گذاشت، نیروهای حاکم بر جامعه «آدم‌خوار» بودند و این «آدم‌خواری» در سدهٔ بیستم

و دوران اوج دیوانگی سرمایه‌داری، به نهایت خود رسیده است. ولی اینان، همیشه لباس قصابی بر تن ندارند و در پناه نظریه‌های فلسفی، چهرهٔ خود را می‌پوشانند. سرخ‌پوستان بومی مریکا را قتل‌عام کردند و، آن‌وقت، هنر سینمایی خود را در خدمت آدم‌کشان گذاشتند و از این انسان‌های آرام و زحمت‌کش، چهره‌ای «وحشی» به جهان نشان دادند. حتا بسیاری از فیلم‌های به اصطلاح «علمی» امریکایی، مبلغ وحشی‌گری و آدم‌خواری است. «مسافران فضایی» این فیلم‌ها، هرجا به سرزمینی ناشناخته می‌رسند، با موجوداتی «وحشی» روبه‌رو می‌شوند که تمامی نیروهای علمی خود را برای نابودی جهان هستی بسیج کرده‌اند.

سردمداران جهان سرمایه‌داری، ناچارند همهٔ مردم جهان و همهٔ گذشتهٔ تاریخ بشری را سیاه جلوه دهند تا در پناه آن، سیاهی قلب خود و سیاه‌کاری‌های رفتار خود را بپوشانند. انسان مظلوم، همیشه در کنار آفرینش‌های هنری و علمی خود، برای رسیدن به زندگی بهتر تلاش کرده است. این تلاش در سراسر تاریخ پر رنج و شکنجهٔ انسان وجود داشته است و همیشه، این تلاش‌ها، به نام مبارزه با «وحشی‌گری» سرکوب شده است. ولی در دوران ما، بیش از هر زمان دیگری، در تلاش‌اند تا تاریخ را تحریف کنند و «وحشی‌گری» و «آدم‌خواری» انسان را به اثبات برسانند.

۵. انسان مقهور دانش خود نخواهد شد

یکی دیگر از تبلیغ‌های پردامنهٔ فلسفه‌بافان جهان سرمایه‌داری، در جهت نفی دتنش و اثبات زبونی انسان است. تبلیغ می‌کنند که انسان، سرنوشتی جز تسلیم ندارد. می‌گویند تا زمانی که نیروهای طبیعت آزاد بودند و دانش بشر توانایی رویارویی با آن‌ها را نداشت، انسان از یک طرف در بند خرافه و طلسم و جادو و خیال‌پردازی بود و، از طرف دیگر، با اندک خشم طبیعت، نابودی و ویرانی به سراغش می‌آمد؛ ولی اکنون که، به طور نسبی، برخی از قانون‌های طبیعت را شناخته و بر برخی از نیروهای آن، کم و بیش، حاکم

شده است، ناچار است در برابر سرنوشتی که دانش برای او تعیین می‌کند، تسلیم شود.

تصور هراسناکی که برخی فیلم‌سازان و قصه‌نویسان دنیای غرب، از آدم‌های ماشینی آینده و روبات‌ها می‌دهند، موی بر تن آدم راست می‌کند. چاره‌ای برای انسان نیست، همیشه باید تسلیم باشد: یا تسلیم جهل و ناآگاهی و یا تسلیم «وحشی‌گریِ» ناشی از پیشرفت دانش و انسان‌های مصنوعی آینده.

این درست است که ماشین، به طور دایم، تکامل می‌یابد و به سوی جامعیت پیش می‌رود، ولی تکامل و جامعیت ماشین، فرع تکامل و جامعیت انسان است. انسان و ماشین، هردو تکامل می‌یابند و پیش می‌روند، ولی همیشه جامعیت انسان از جامعیت ماشین جلوتر است و ماشین هرگز نمی‌تواند جانشین انسان بشود و یا از آن جلو بیفتد.

□

این کتاب هم، با همان روش‌های جلدهای پیشین «ریاضیات محاسبه‌ای» تنظیم شده است و نیازی نیست، دوباره آن‌ها را تکرار کنیم. تنها این اشاره را لازم می‌دانم که، به عمد و مثل کتاب‌های قبلی، در تمرین‌ها، مساله‌های «ساده‌تر» و «دشوارتر» از هم جدا نشده‌اند. وقتی در زندگی، یا ضمن مطالعهٔ طبیعت و یا در برخورد با دشواری‌های دانش‌های دیگر، به مساله‌هایی برمی‌خورید که باید به «حل» آن‌ها بپردازید، کسی این «مساله‌ها» را برای شما گروه‌بندی نمی‌کند که در آغاز، از ساده‌ها شروع کنید و، سپس و به‌تدریج، وارد دشوارها بشوید. تنها کاری که در این کتاب‌ها شده است، این است که، در آن‌ها، مساله‌های دشوارتر با نشانه ستاره (*) مشخص شده‌اند. ولی سفارش من این است که، اگر می‌خواهید در درس ریاضی خود پیشرفت درخشانی داشته باشید و اگر می‌خواهید، به واقع، درکی ریاضی پیدا کنید،

مساله‌ها را دست‌چین و یا گروه‌بندی نکنید. و به همان ردیفی که در کتاب آمده است، آن‌ها را دنبال کنید.

تمرین‌ها

۱. وقتی از عدد طبیعی n، عدد $n^۲ + ۱$ را ساخته‌ایم، عددی نه‌رقمی به دست آمده است که در بین رقم‌های آن صفر وجود ندارد. ثابت کنید، در این عدد نه‌رقمی، دست‌کم، دو رقم برابر وجود دارد.

*۲. بودجه‌ای برای کشیدن ۲۸ کیلومتر جاده وجود دارد. با این بودجه می‌خواهیم جاده‌هایی احداث کنیم که چهار مرکز A، B، C و D را، که در چهار راس مربعی به ضلع برابر ۱۰ کیلومتر قرار دارند به هم وصل کنیم. جاده‌ها را چگونه بسازیم که، روی‌هم، از ۲۸ کیلومتر تجاوز نکند و، درضمن، بتوان از هر مرکز به مرکز دیگر، از طریق جاده رفت؟

۳. $۹ = ۳^۲$، $۲۵ = ۵^۲$، $۴۹ = ۷^۲$ و $۸۱ = ۹^۲$. هریک از این عددها، در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ می‌دهند. آیا این وضع تصادفی است و یا یک قانون است که مجذور هر عدد فردی از آن پیروی می‌کند؟

۴. ثابت کنید، اگر مجموع سه عدد بر ۶ بخش‌پذیر باشد، مجموع مکعب‌های آن‌ها هم، بر ۶ بخش‌پذیر است.

۵. عدد طبیعی x، بین ۰ و ۶۰ قرار دارد ($۰ < x < ۶۰$). x را بر عددهای ۳، ۴ و ۵ تقسیم کرده‌ایم، به ترتیب، باقی‌مانده‌های a، b و c به‌دست آمده است. ثابت کنید x برابر است با باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد $۴۰a + ۴۵b + ۳۶c$ بر ۶۰.

۶. این دو برابری را آزمایش کنید تا به درستی آن‌ها قانع شوید:

$$\sqrt{۲\frac{۲}{۳}} = ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}} \quad \text{و} \quad \sqrt{۷\frac{۷}{۴۸}} = ۷\sqrt{\frac{۷}{۴۸}} \qquad (۱)$$

روشن است که همه‌جا نمی‌توان از این «قانون» استفاده کرد. مثلاً

$$\sqrt{۵\frac{۴}{۹}} \neq ۵\sqrt{\frac{۴}{۹}}$$

زیرا سمت چپ برابری، برابر $\frac{۷}{۳}$ و سمت راست آن برابر $\frac{۱۰}{۳}$ است. آیا می‌توانید دستوری پیدا کنید که، به یاری آن، بتوان همهٔ برابری‌های از نوع (۱) را نوشت؟

۷. دو برابری عجیب:

$$\frac{۷\frac{۱}{۴}}{۴\frac{۱}{۷}} = \frac{۷}{۴} \text{ و } \frac{۵\frac{۱}{۱۵}}{۱۵\frac{۱}{۵}} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

آزمایش کنید. این دو برابری درست‌اند؛ روشن است که همیشه این‌طور نیست. آیا می‌توانید دستوری برای نوشتن این‌گونه برابری‌ها پیدا کنید؟

۸. آیا برابری $\sqrt{\sec^{۲}\alpha - ۲\tan\alpha} = ۱ - \tan\alpha$ یک اتحاد درست است؟

۹. نمودار دو تابع با ضابطهٔ زیر را رسم کنید:

$$۱)\ y = \sqrt{(x^{۲}-۴)^{۲}} + \sqrt{(x^{۲}+۴)^{۲}};\quad ۲)\ y = \sqrt{۱-\sin^{۲}x}$$

۱۰. چیستا و ناهید و مژده سه خواهرند. وقتی ناهید به سن امروزی چیستا برسد، آن‌وقت سن چیستا دو برابر سن مژده خواهد بود. مژده بزرگتر است یا ناهید؟ هم‌اکنون، نسبت سن ناهید به سن مژده چقدر است؟

۱۱. منوچهر، ابراهیم، داراب و تهمورث در یک مدرسه خدمت می‌کنند، یکی رئیس، دیگری معاون، سومی دفتردار و چهارمی خدمت‌گذار مدرسه است. می‌دانیم:

داراب از ابراهیم بزرگتر است؛

رئیس مدرسه، در این گوره چهارنفری، خویشاوندی ندارد؛

دفتردار و خدمت‌گذار برادرند و برادر دیگری ندارند؛

داراب بردارزادهٔ منوچهر است؛

خدمت‌گذار عموی معاون نیست، معاون هم عموی دفتردار نیست.

معلوم کنید، در این مدرسه، هرکس چه پستی دارد؟ چه خویشاوندی با هم دارند؟

۱۲. یک گروه ۱۰۰ نفری جهان‌گرد وارد ایران می‌شدند. ۱۰ نفر از آن‌ها نه به زبان فرانسوی صحبت می‌کردند و نه به زبان انگلیسی. ۷۵ نفر با زبان فرانسوی و ۸۵ نفر با زبان انگلیسی آشنا بودند. چند جهان‌گرد، می‌توانند به هر دو زبان فرانسوی و انگلیسی صحبت کنند؟

۱۳. ضرب زیر را کامل کنید:

```
      ۲ * *  ×
      ۳ * *
  -----------
      ۵ * *
    * ۴ *
    * ۳
  -----------
  * * * * *
```

به شرطی که هر ستاره (*)، نماینده یک رقم باشد و بدانیم، در این ضرب، از رقم ۷ استفاده نشده است.

۱۴. مجموع سه عدد، برابر است با p^p که، در آن، p عددی است اول. مجموع دوتا از این عددها، چهار برابر عدد سوم است و کوچکترین مضرب مشترک همان دو عدد، برابر است با ۲۵۰. این سه عدد را پیدا کنید.

۱۵. در این‌جا با کنار هم گذاشتن رقم‌های از ۱ تا ۹، با استفاده از دو نشانهٔ + و −، عدد ۱۰۰ را ساخته‌ایم:

$$۱۲۳ - ۴۵ - ۶۷ + ۸۹ = ۱۰۰$$

آیا می‌توانید، رقم‌ها را به‌صورت نزولی، یعنی از ۹ تا ۱ در نظر بگیرید و، با استفاده از نشانه‌های $+$ و $-$، عدد ۱۰۰ را بسازید؟

۱۶. در دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

می‌دانیم عددهای a، b، c، a'، b' و c' (به همین ردیف) تشکیل یک تصاعد حسابی داده‌اند. ثابت کنید، جواب دستگاه، به قدرنسبت تصاعد بستگی ندارد.

۱۷. هفت عدد طبیعی پشت‌سر هم پیدا کنید که، مجموع توان‌های دوم چهار عدد کوچکتر، برابر مجموع توان‌های دوم سه عدد بزرگتر باشد.

۱۸. با رقم‌های یک عدد سه‌رقمی، همهٔ عددهای دورقمی ممکن را (البته، بدون تکرار رقم‌ها) نوشته‌ایم. مجموع این عددهای دورقمی، دو برابر عدد سه‌رقمی شده است. عدد سه‌رقمی را پیدا کنید.

۱۹. تعدادی مرغ، خروس و غاز، روی‌هم ۳۰ عدد خریدیم و، برای قیمت آن‌ها، ۳۰ اسکناس پرداختیم (اسکناس‌ها، ارزش برابر دارند). می‌دانیم برای هر سه مرغ یک اسکناس، برای هر دو خروس یک اسکناس و برای هر غاز دو اسکناس پرداخته‌ایم. چند مرغ، چند خروس و چند غاز خریده‌ایم؟

این مساله، متعلق به لئوناردو فیبوناچی، ریاضی‌دان ایتالیایی سدهٔ دوازدهم است که، با اندکی تغییر، در این‌جا آورده‌ایم.

۲۰. عددی است سه رقمی با رقم‌های مختلف. وقتی ۷ واحد به آن اضافه کردیم بر ۷، وقتی باز هم ۸ واحد به آن اضافه کردیم بر ۸ و وقتی باز هم ۹ واحد به آن اضافه کردیم بر ۹ بخش‌پذیر شد. چند عدد سه‌رقمی با این شرط‌ها وجود دارد؟

*۲۱. به‌ازای کدام عددهای گویای x، مقدار عبارت

$$\log_{۲}(x^{۲} - ۴x - ۲)$$

برابر با عددی درست (مثبت، منفی یا صفر) می‌شود؟

۲۲. در یک مستطیل، طول هر ضلع، با عددی درست بیان شده است. درضمن، عدد مساحت این مستطیل با عدد محیط آن برابر است. طول هریک از دو ضلع مستطیل را پیدا کنید.

۲۳. عددی دورقمی پیدا کنید که برابر باشد با مجموع مکعب رقم یکان و مربع رقم دهگان خود.

۲۴. الف) دستوری پیدا کنید که، به یاری آن، بتوان به مجموعهٔ عددهای درست (x, y) دست یافت که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$۲x - ۳y = ۱$$

ب) آیا برای (x, y) در معادله $۹x - ۱۲y = ۱۷$ می‌توان جوابی شامل عددهای درست x و y پیدا کرد؟

*۲۵. معادلهٔ دایره‌ای، به این صورت داده شده است:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۳ = ۰$$

معادلهٔ سهمی را پیدا کنید که، راس آن، بر مرکز این دایره واقع باشد و از دایره، وتری به طول $\sqrt{۲}$ جدا کند. محور تقارن سهمی، موازی با محور $y'y$ است.

۲۶. معادله سهمی، به این صورت داده شده است:

$$y = x^۲ + (a - ۱)x - a \qquad (۱)$$

۱) به‌ازای چه مقداری از a، سهمی (۱)، محور عرض را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۳}{۲}$ قطع می‌کند؟

۲) آیا می‌توان a را طوری پیدا کرد که سهمی (۱)، با محور $x'x$، نقطه مشترکی نداشته باشد؟ در چه حالتی سهمی (۱)، بر محور $x'x$ مماس است؟

۳) a را طوری پیدا کنید که راس سهمی (۱)، در نقطه‌ای به طول برابر ۱ باشد.

۴) به‌ازای چه مقداری از a، راس سهمی عرضی برابر ۱− دارد؟

*۵) خط راست $y = ۲ - ۲x$، بر کدام‌یک از سهمی‌های (۱) و در چه نقطه‌ای مماس است؟

۶) اگر سهمی‌های (۱)، از نقطه یا نقطه‌های ثابتی می‌گذرند، مختصات این نقطه یا نقطه‌ها را پیدا کنید.

*۷) وقتی a تغییر کند، جای سهمی (۱) و بنابراین، جای راس آن تغییر می‌کند. ثابت کنید، راس سهمی‌های (۱)، روی یک سهمی مماس بر محور $x'x$ جابه‌جا می‌شود.

۸) $a = ۲$ فرض کنید: الف) خط راست $y = x + m$. به‌ازای چه مقدارهایی از m سهمی را قطع می‌کند؟ اگر نقطه‌های برخورد خط راست و سهمی را A و B بنامیم، معادله مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره‌خط راست AB را پیدا کنید؛

ب) مساله الف را دربارهٔ خط راست $y = mx$ حل کنید.

*۹) سهمی $y = -x^۲$ به‌ازای بعضی مقدارهای a، سهمی (۱) را قطع می‌کند. نقطه‌های برخورد دو سهمی را M و N، و وسط پاره‌خط راست MN را T می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ T را پیدا کنید.

۲۷. از نقطهٔ به طول $x = ۲$ واقع بر نمودار سهمی

$$y = -x^۲ + ۵x - ۳$$

مماسی بر سهمی رسم کرده‌ایم، این مماس، محورهای مختصات را در چه نقطه‌هایی قطع می‌کند؟

۲۸. از نقطهٔ به طول $\frac{۱}{۵}$ واقع بر محور $x'x$، مماس‌هایی بر نمودار سهمی $y = (x - ۱)(x - ۲)$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این مماس و مختصات

نقطهٔ تماس را پیدا کنید.

۲۹. سهمی $y = x(۲ - x)$ داده شده است. از نقطه‌های زیر، کدام روی سهمی، کدام در درون سهمی و کدام در بیرون سهمی قرار دارند:

$$A\left(\frac{۳}{۴}, \frac{۱۵}{۱۶}\right); \quad B(۱, ۰); \quad C(۰, ۲); \quad D(۰, -۲)$$

*۳۰. m را طوری پیدا کنید که معادلهٔ درجه سوم

$$x^۳ - (۲m + ۱)x^۲ + (m + ۱)x + m - ۱ = ۰$$

دو ریشهٔ برابر داشته باشد. در هر حالت، ریشه‌های معادله را محاسبه کنید.

۳۱. از نقطهٔ A به طول ۱− واقع بر محور $x'x$، بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^۳ + x^۲$، چند مماس می‌توان رسم کرد؟ معادلهٔ هریک از این مماس‌ها را پیدا کنید.

۳۲. هشت عدد طبیعی کوچکتر از ۱۶، به تصادف انتخاب کرده‌ایم. اگر این هشت عدد را دوبه‌دو در نظر بگیریم و، در هر حالت، عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کنیم، چند تفاضل به‌دست می‌آید؟ ثابت کنید، در بین این تفاضل‌ها، دست‌کم سه عدد برابر وجود دارد.

*۳۳. $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضریب‌های درست است و می‌دانیم $f(۷)$ بر ۱۱ و $f(۱۱)$ بر ۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $f(۱۸)$ بر ۷۷ بخش‌پذیر است.

۳۴. با فرض درست بودن عددهای a و b و a' و b'، می‌دانیم معادله‌های

$$x^۲ + ax + b = ۰, \quad x^۲ + a'x + b' = ۰$$

یک ریشهٔ مشترک دارند که عددی درست نیست. ثابت کنید، در این صورت

$$a = a' \text{ و } b = b'$$

*۳۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)$ را که به‌ازای همهٔ مقدارهای x معین و حقیقی است، با شرط

$$f(x+a)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{f(x)-(f(x))^{۲}}$$

داده شده است که، در آن، a عددی است حقیقی و مخالف صفر.

ثابت کنید $f(x)$ تابعی متناوب است، یعنی عددی حقیقی مثل $b \neq ۰$ وجود دارد، به نحوی که، برای همهٔ مقدارهای x، برابری $f(x+b)=f(x)$ برقرار باشد.

۳۶. جملهٔ اول و قدر نسبت یک تصاعد حسابی بی‌پایان، عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید، در این تصاعد می‌توان بی‌نهایت جمله پیدا کرد که، مجموع رقم‌های آن‌ها، یکی باشد.

۳۷. مجموعهٔ بی‌پایان M شامل عددهای طبیعی است و می‌دانیم از بین هر ۵۰ عدد طبیعی پشت‌سرهم، دست‌کم یک جمله از مجموعه وجود دارد. ثابت کنید، می‌توان چهار جملهٔ m و n و p و q از این مجموعه را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$m+n=p+q$$

۳۸. n عددی است طبیعی. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که با عدد $n^{۳}-۳n^{۲}+۴$ برابر و، درضمن، بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد.

*۳۹. آیا عددهای درست a و b را می‌توان طوری پیدا کرد که حاصل‌ضرب دو ریشه از چهار ریشهٔ معادلهٔ

$$x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+ax+۱=۰$$

برابر با ۳ باشد؟

*۴۰. امروز، روز ۲۵ از ماه ۴ سال ۱۳۷۵ است. $f(x)$ را با همین عددها ساخته‌ایم:

$$f(x) = x^{۱۳۷۵} + x^{۲۵} + x^{۴}$$

می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ را پیدا کنیم، به شرطی که

$$g(x) = (x^{۲۷} + ۱)(x^{۵۴} + x^{۲۷} + ۱)$$

۴۱. به‌ازای چه مقدارهایی از a، ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$(x^{۲} + ax + ۷)\sin(\pi x) = ۰$$

تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند؟

*۴۲. می‌دانیم $f(x) = \frac{۴^x}{۴^x + ۲}$ $(x \in \mathbf{R})$. این مجموع را محاسبه کنید:

$$A = f\left(\frac{۱}{۱۳۷۶}\right) + f\left(\frac{۲}{۱۳۷۶}\right) + \ldots + f\left(\frac{۱۳۷۴}{۱۳۷۶}\right) + f\left(\frac{۱۳۷۵}{۱۳۷۶}\right)$$

*۴۳. φ کمانی است مفروض و دلخواه. بدون استفاده از جدول (جدولی که مقدار کسینوس یک زاویه را به تقریب می‌دهد) و تنها با استفاده از شکل، چگونه می‌توان پاره‌خط راستی را به نسبت‌های

$$۱ : \cos^{۲}\varphi : \cos^{۴}\varphi : \cos^{۶}\varphi : \ldots : \cos^{۲n}\varphi$$

تقسیم کرد؟

۱. آمار و آمار ریاضی ـ احتمال

§۱. آشنایی با واژه‌های آمار و آمار ریاضی

آمار درست به همان معنایی است که در گفت‌وشنودهای روزانهٔ خود به‌کار می‌برید: آمار دانش‌آموزان کلاس شما (یعنی تعداد دانش‌آموزانی که در کلاس شما درس می‌خوانند)؛ آمار بی‌سوادان در فلان محلهٔ شهر تهران معین شد (یعنی معلوم شد، در این محله، چند نفر بی‌سوادند)؛ ادارهٔ راهنمایی و رانندگی، آمار تصادف‌های منجر به فوت در سه ماه اول سال را، منتشر کرد؛ شهرداری آمار خانه‌های کلنگی و نیمه ویران را در اختیار دارد؛ وزارت صنایع آمار خودروهای سواری را که در سال گذشته در ایران ساخته شده‌اند، جالب و امیدوار کننده دانست؛ آمار مرگ و میر کودکان پایین دو سال رو به کاهش است؛ آمار کتاب‌هایی که در شش ماه اول سال منتشر شده است، نسبت به زمان مشابه خود در سال گذشته، رشد قابل توجهی نشان می‌دهد و غیره.

ولی استفادهٔ از واژهٔ «آمار»، به این صورت کلی و عام، آگاهی جالبی در اختیار ما نمی‌گذارد که، به یاری آن، بتوان نتیجه‌هایی برای رفع دشواری‌های اجتماعی یا اقتصادی به‌دست آورد. موضوع را با نمونه‌های مشخص‌تری روشن می‌کنیم.

اگر آگاه شوید که ۵۰ نفر از ساکنان یک روستا بی‌سوادند، چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟ اگر این روستا، منطقه‌ای آباد و فعال و دارای جمعیتی بالغ بر ۱۲۰۰۰ نفر باشد، می‌توانید به تقریب بگویید: بی‌سوادی در این روستا ریشه‌کن شده است، زیرا ۵۰ نفر بی‌سواد در بین جمعیتی بیش از ۱۲۰۰۰ نفر، رقم ناچیزی است (از هر ۲۴۰ نفر، یک نفر بی‌سواد است)؛ ولی اگر با روستایی نیمه ویران و متروک سروکار داشته باشید که بیش از ۵۵ نفر در آن زندگی نمی‌کنند، باید نتیجه بگیرید، با روستایی روبه‌رو هستید که ساکنان آن بی‌سوادند، زیرا از هر ۱۱ نفر ساکن این روستا، ۱۰ نفر بی‌سوادند. مطلب به همین‌جا تمام نمی‌شود. وقتی از فرد باسواد صحبت می‌کنید، چه تعریفی برای آن دارید؟ تنها خواندن و نوشتن را در مرز مقدماتی آن یاد گرفته است و، به اصطلاح، کوره سوادی دارد، یا می‌تواند کتاب بخواند؟ آیا در روستا کتاب‌خانهٔ عمومی وجود دارد و چه کتاب‌هایی در آن است؟ آمار استفاده کنندگان از کتاب چه وضعی دارد؟ آیا کتاب‌ها و نشریه‌هایی که در مرکز چاپ و منتشر می‌شوند، به سرعت و منظم در اختیار باسوادان قرار می‌گیرد؟ وضع برق، تلفن و سایر رسانه‌ها چگونه است؟ ... و ده‌ها پرسش دیگر. تنها براساس پاسخی که به این پرسش‌ها داده می‌شود، می‌توان وضع روستا را از نظر باسوادی و بی‌سوادی روشن کرد و طرحی و برنامه‌ای برای رفع کمبودهای آن اندیشید. باید آمارهای گوناگون مربوط به یک روستا با هم و با آمارهای مشابه در نقطه‌های دیگر مقایسه شوند تا میزان عقب‌ماندگی یا پیش‌افتادگی مردم ساکن در آن، به درستی و روشنی مشخص شود. جمع‌آوری این آمارها، پیدا کردن راه و روش تجزیه و تحلیل آن‌ها و مقایسهٔ نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های مشابه جاهای دیگر، چیزی است که به آن دانش آمار یا آمارشناسی و یا دقیق‌تر آمار ریاضی گویند.

آمار ریاضی، مثل هر دانش دیگری (و همچون همهٔ شاخه‌های دیگر ریاضیات)، به قراردادها، نام‌گذاری‌ها، تعریف‌ها و قضیه‌ها نیاز دارد تا، به یاری آن‌ها، بتوان قانون‌های حاکم بر طبیعت و جامعه را، براساس داده‌های آماری کشف و از آن‌ها استفاده کرد.

آمار به معنای عام خود، همیشه به‌نحوی با انسان همراه بوده است. در لوح‌های فراوان گلی که از تخت‌جمشید به‌دست آمده (و با کمال تاسف همهٔ آن‌ها از ایران خارج و به‌ویژه به امریکا برده شده‌اند) روشن می‌شود که در زمان حکومت هخامنشیان، سازمان اداری گسترده و منظمی وجود داشته است که به همهٔ زمینه‌های اقتصادی و اجتماعی کشور رسیدگی می‌کرده است. صورت کارگاه‌های خیاطی و فرش‌بافی و مبل‌سازی و میزان محصول کشتزارها و دام‌داری‌ها و سهم ماهانه هریک از کسانی که به کار مشغول بوده‌اند و ده‌ها «حساب» دیگر در مرکز استان‌ها نگه‌داری می‌شده است و این‌ها، چیزی جز همان آمار خام نیست. به‌جز این، برای لشکرکشی‌ها و آرایش نظام‌های دفاعی و جنگی، که همهٔ ملت‌های باستانی دچار آن بوده‌اند، برای تهیهٔ غذا، لباس و ابزار نظامی سربازان، محاسبه‌هایی کم و بیش پیچیده لازم بود که تنها بر اساس داده‌های آماری (تعداد سربازان، در ازای مسیر حرکت و غیره) ممکن می‌شد. ساختن قصرها، برج‌ها و پرستش‌گاه‌ها، تقسیم زمین و آب برای کشت، جابه‌جا کردن کالاهای مورد نیاز مردم و یا مصالح ساختمانی، بازرگانی با قوم‌ها و ملت‌های دور و نزدیک، همه نیازمند محاسبه برمبنای داده‌های آماری بود.

ولی با آن‌که سندهایی دربارهٔ استفادهٔ قوم‌ها و ملت‌های مختلف از پنج‌هزار سال پیش تاکنون، در دست است، باید گفت، دانش آمار و آمار ریاضی دانشی جوان است و بیش از ۱۵۰ سال از عمر آن نمی‌گذرد. در ایران، تنها در سال ۱۳۰۴ خورشیدی (طبق قانونی که در خرداد ۱۳۰۴ در دورهٔ پنجم مجلس شورای ملی تصویب شد)، اداره‌ای به نام «ثبت احوال» به‌وجود آمد که کارش ثبت نوزادان و صدور شناسنامه (که در آن زمان «سِجِل» می‌گفتند) و ثبت مرگ و میرها بود (برای مقایسه، در انگلستان، ثبت مرگ و میرها، از نیمهٔ دوم سدهٔ شانزدهم میلادی، یعنی بیش از ۴۵۰ سال پیش معمول شد).

با وجود این، آن‌چه به آن دانش آمار و آمار ریاضی می‌گوییم، محصولی از تلاش ریاضی‌دانان از آغاز سدهٔ نوزدهم میلادی است و، به‌تدریج، چنان رشد کرد و پیش رفت که به سختی می‌توان زندگی اجتماعی و اقتصادی امروز

را، بدون وجود دانش آمار، تصور کرد. به‌جز زمینه‌هایی از زندگی اقتصادی مثل بیمه، مالیات، تولید، بازرگانی و غیر آن، به تقریب همهٔ دانش‌های طبیعی مثل اخترشناسی، زمین‌شناسی، فیزیک، هواشناسی، زیست‌شناسی، روان‌شناسی، پزشکی، علوم انسانی و غیر آن، نیازمند به آمار ریاضی هستند.

*§۲. آشنایی با واژهٔ احتمال

آندره نیکلایه‌ویچ کولموگوروف (۱۹۰۳_۱۹۸۷ میلادی) ریاضی‌دان بزرگ سده بیستم، که خود در کشف قانون‌های نظریهٔ احتمال نقشی بزرگ داشته است، می‌گوید:

> ... پیشرفت درک و معرفت آدمی، تنها در این نیست که بستگی‌های واقعی موجود در بین پدیده‌ها را پیدا کند؛ در این هم هست که بتواند بستگی غیر واقعی و خیالی را رد کند، یعنی بتواند استقلال دو گروه پدیده را در قضیه‌هایی که مطرح است، ثابت کند. فاش کردن تلاش‌های بی‌معنی فال‌بین‌ها و هواداران اخترشماری [کسانی که گمان می‌کنند به کمک حرکت ستارگان می‌توانند آینده را پیش‌گویی کنند]، که می‌خواهند بین دو گروه پدیده‌ای که هیچ رابطه‌ای با هم ندارند، رابطه‌ای برقرار کنند، یکی از این نمونه‌ها است. ولی این، هرگز به معنای آن نیست که همه‌جا می‌توانیم، بدون بحث انتقادی، استقلال و عدم وابستگی پدیده‌ها را بپذیریم. برعکس، این موضوع ما را وامی‌دارد که، در درجهٔ نخست و با دقت کامل، محک و معیاری برای پژوهش در فرضیهٔ عدم وابستگی‌ها به‌دست آوریم و سپس، باز هم با دقت کامل، حالت‌های مرزی را پیدا کنیم، حالت‌هایی که در آن‌ها، لازم است بستگی بین عامل‌ها را به حساب آوریم ...

ارسطو، بحث مربوط به «شانس» را، بیرون از مرزهای دانش می‌دانست، چراکه به نظر او، شانس، مجموعهٔ پیش‌آمدهایی است که درک آن، از توان عقل انسانی بیرون است.

«اسپینورا» با مسالهٔ «شانس»، علمی‌تر برخورد می‌کند و آن را به معنای ناآگاهی ما از علت‌ها و واقعیت‌ها می‌داند.

برای نخستین بار، کاردان ریاضی‌دان ایتالیایی (۱۵۰۶_۱۵۷۶) و گالیله اخترشناس و فیزیک‌دان ایتالیایی (۱۵۶۴_۱۶۴۲ میلادی) تلاش کردند تا، ضمن طرح بازی با تاس (مکعب کوچکی که روی وجه‌های آن، عددهای از ۱ تا ۶ نوشته شده است)، مسالهٔ «شانس» و «احتمال» را، با دیدی علمی، بررسی کنند. با این همه، باید آغاز بحث دقیق ریاضی دربارهٔ «احتمال» و «شانس» را، در کارهای پاسکال (۱۶۲۳_۱۶۶۲) و فِرما (۱۶۰۱_۱۶۶۵ میلادی) ریاضی‌دانان فرانسوی و کریستیان هوی گنس (۱۶۲۹_۱۶۹۵) ریاضی‌دان و فیزیک‌دان هلندی دانست.

وقتی دو شطرنج‌باز می‌خواهند بازی خود را آغاز کنند، با قرعه‌کشی، مثلاً با پرتاب سکه، معلوم می‌کنند، چه کسی باید بازی را آغاز کند. این، شاید چندان مهم نباشد. ولی آیا وقتی عضوهای هیات منصفهٔ دادگاه را، با قرعه انتخاب کنند، می‌توانیم اطمینان کنیم که در سرنوشت متهم تاثیری ندارد؟

در زندگی روزانه، اغلب با جمله‌هایی از این‌گونه برخورد می‌کنیم که: «به احتمال زیاد فردا برف خواهد آمد»، «بعید است تیم فوتبال A از تیم B ببرد»، «به احتمال زیاد، این دانش‌آموز آیندهٔ درخشانی دارد»، «گمان نمی‌کنم، این موقع شب، کسی پیش من بیاید» و . . .

همهٔ این داوری‌ها را، می‌توان نوعی ارزیابی دانست: ارزیابی امکان رویداد یک پیش‌آمد، که اغلب براساس تجزیه و تحلیل آگاهی‌های موجود انجام می‌گیرد و، به همین دلیل، می‌توان آن‌ها را نوعی ارزیابی عینی به حساب آورد. ولی اگر دربارهٔ کسی که ندیده‌اید و نمی‌شناسید، داوری کنید که: «به

نظرم می‌آید، آدم خوبی نیست»، آن وقت ارزیابی شما یک ارزیابی ذهنی است و با واقعیت ارتباطی ندارد.

احتمال ریاضی هم، یک ارزیابی عینی از رویدادی است که ممکن است پیش آید و با تجزیه و تحلیل شرطها و آگاهی‌های موجود، به‌صورت یک عدد بیان می‌شود. به زبان دیگر، **احتمال ریاضی، یک ویژگی عددی است که امکان رویداد پیش‌آمدی را ارزیابی می‌کند.** احتمال ریاضی، بخشی از شناخت علمی است که نوع خاصی از بستگی بین پدیده‌ها را بررسی می‌کند. احتمال، براساس قانون‌هایی، که قانون‌های احتمالی و آماری نام دارند، بنیان گرفته است.

برخورد جزمی با دانش‌های طبیعی و قبول بی چون و چرای قانون‌های حاکم بر آن‌ها (که تا پیش از سدهٔ نوزدهم میلادی برای همه پذیرفتنی بود)، از آغاز سدهٔ نوزدهم و به‌تدریج، نیرو و توان خود را از دست داد.

همراه با پدیدار شدن نظریه‌های تازهٔ فیزیکی، ابزار ریاضی مورد نیاز آن‌ها، یعنی نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی، گسترش و نفوذ خود را آغاز کرد. قانون‌های عادی فیزیک (قانون‌های گی‌لوساک، بُویل ـ ماریویت، آووگادرو و غیره) تفسیرهای تازه‌ای پیدا کردند، پوشش جزمی و مطلق آن‌ها کنار رفت و روشن شد، وقتی با چگالی‌های پایین گاز سروکار داشته باشیم، این قانون‌ها، درستی و دقت خود را از دست می‌دهند و گاز از قانون‌مندی‌های دیگری پیروی می‌کند: **قانون‌مندی‌های پدیده‌های تصادفی.** به تدریج، فیزیک‌دانان دریافتند، در طبیعت، قانون‌های مطلق و جزمی ـ آن‌طور که در کتاب‌های درسی و تمامی دستگاه‌های آموزشی آمده است ـ وجود ندارد. دانش امروز، به این اعتقاد رسیده است که، همهٔ پدیده‌های مربوط به طبیعت، خصلتی آماری دارند و قانون‌های حاکم بر آن‌ها را، تنها با اصطلاح‌های آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال، می‌توان با دقت و به طور کامل تنظیم کرد. فیزیک آماری، نه‌تنها حقانیت وجودی خود را ثابت کرد، بلکه پایهٔ اصلی تمامی فیزیک

امروزی را تشکیل داده است. نقش فیزیک آماری، درواقع، همراه با تکامل اندیشهٔ ساختمان اتمی و «زیر اتمی» ماده رشد کرده است. در زمان ما، نمی‌توان فیزیک‌دانی را پیدا کرد که دیدگاه دیگری داشته باشد. روش آماری در رویدادهای فیزیکی، امکان می‌دهد تا ویژگی‌های این پدیده‌ها را، با دقت و به صورتی گسترده بررسی کنیم.

روش آماری امکان داد تا بررسی ریاضی پدیده‌های فیزیک هسته‌ای به سرعت شکل داده شود. ظهور «رادیوفیزیک» و مطالعهٔ مساله‌های مربوط به پخش علامت‌های رادیویی، نه‌تنها اهمیت درک آماری را تقویت کرد، بلکه به تکامل این نظریهٔ ریاضی هم یاری رسانید و موجب پیدایش نظریه‌های جدید مثل «نظریهٔ انفورماسیون» شد.

درک ماهیت واکنش‌های شیمیایی، بدون داده‌های آماری ممکن نیست. به‌ویژه تمامی بخش «ریاضی ـ فیزیک» و دستگاه ریاضی لازم برای بررسی آن، بر اساس آمار است.

نتیجه‌گیری‌های ناشی از مشاهده، که همیشه همراه با اشتباه‌های تصادفی است، و این تصادف‌ها هم، برای مشاهده کننده، در شرایط مختلف آزمایش، تغییر می‌کند، حتا در سدهٔ نوزدهم میلادی منجر به بررسی‌هایی در زمینهٔ ساختن نظریهٔ خطاها شد و این نظریه، به‌طور کامل، براساس آمار قرار دارد.

اخترشناسی هم، به میزان گسترده‌ای، از آمار و نظریهٔ احتمال استفاده می‌کند. برای بررسی پراکندگی ماده در فضا، بررسی سیلاب‌های ذره‌های کیهانی و بسیاری از پدیده‌های دیگر، باید به طور منظم، از آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال استفاده کرد.

روش‌های محاسبه‌ای، که در زمان ما با پیشرفت بی‌اندازهٔ رایانه‌ها، بسیار جلو رفته است، به صورتی گسترده بر نظریهٔ احتمال تکیه دارد. این نیاز نه‌تنها به اشتباه‌های ناشی از محاسبه‌های سنگین و گرد کردن آن‌ها مربوط است، بلکه در خود محاسبه هم، به شدت احساس می‌شود. امروز روشن شده است

که پیشرفت دستگاه‌های محاسبه‌ای، بدون تکیه بر روش‌های آماری ممکن نیست. با این روش است که می‌توان، کار ماشین دستگاه محاسبه را، با عمل هایی که انجام می‌دهد، هم‌آهنگ کرد.

درک آماری، تنها یک سلیقه یا یک روش اضافی و زودگذر نیست. این روش به‌طور ریشه‌ای با مساله‌های دانش امروز، درآمیخته است، چراکه امکان می‌دهد به صورتی عمیق‌تر، در این مساله‌ها نفوذ کنیم و شناختی گسترده‌تر و نزدیک‌تر به حقیقت، به‌دست آوریم.

علوم انسانی، حوزهٔ گسترده‌ای از دانش‌ها را، از زبان‌شناسی و ادبیات تا روان‌شناسی و اقتصاد دربر می‌گیرد. بی‌شک آموزش را هم باید جزو علوم انسانی به شمار آورد، زیرا کار آن تقویت نیروی ذهنی و جسمی انسان است. خیلی کوتاه در این‌باره صحبت می‌کنیم که چگونه، درک آماری، در روش‌های درسی و پیشرفت علوم انسانی نفوذ کرده است.

روش‌های آماری در دهه‌های اخیر، به صورت گسترده‌ای در بررسی‌های تاریخی و به‌ویژه در تشخیص زمان‌های تاریخی وارد شده است: روشن کردن زمان خاک‌سپاری و تعلق ملی این خاک‌سپاری‌ها، با روش آماری صورت می‌گیرد.

مدت‌ها است که از روش‌های آماری، برای کشف رمز از نوشته‌هایی که متعلق به زبان‌های مرده است، استفاده می‌کنند. اندیشه‌هایی که «شامپولیون» را به کشف رمز خط هیروگلیف هدایت کرد، بروش‌های آماری تکیه داشت. همین روش‌ها کمک کرد تا خط قوم «مایا» (شاخه‌ای از بومیان سرخ‌پوست امریکا که به دست مهاجمان اروپایی نابود شدند) و دیگر نوشته‌های خوانده نشده، کشف رمز شود. قانون تکرار واژه‌ها و حرف‌ها، و تکیه‌هایی که روی واژه‌ها می‌شود، در زبان‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ محاسبه را از روی آگاهی‌هایی که از نوشتهٔ نویسندگان و شاعرانِ مشخص به‌دست می‌آید، انجام می‌دهند. محاسبهٔ بسامد صداها در صحبت‌های شفاهی و در نوشته‌ها،

مسالهٔ مربوط به بهترین کُدگذاری را برای حرف‌های یک زبان، حل می‌کند.

روش‌های آماری در بررسی‌های آموزشی بی‌اندازه اهمیت دارد که، تاکنون، خیلی کم به آن توجه شده است. آموزش و بررسی‌های آموزشی باید دربارهٔ گروه عظیمی انجام شود که، افراد آن، از نظر یادگیری، میزان درک و استعداد، با هم فرق دارند. حتا دربارهٔ یک فرد هم، رفتار او نه‌تنها در طول تحصیل متغیر است و در درس‌های مختلف فرق می‌کند، که دربارهٔ یک درس هم دچار تغییر می‌شود. تاثیرهایی که از بیرون و درون بر فرد وارد می‌شود، آن‌قدر زیاد است که دربارهٔ آن باید کار بسیاری انجام داد. به همین مناسبت به نظر می‌رسد که «نظریهٔ ارتباط» می‌تواند نقشی جدی در حل مساله‌های آموزشی به عهده بگیرد. ولی این نظریه، به طور کامل، بر روش‌های آماری و نظریهٔ احتمال تکیه دارد.

روان‌شناسی، در زمان ما اهمیت جدی پیدا کرده است و، درضمن، تنها به رفتارهای فردی مربوط نمی‌شود. انسان، هر روز و هر ساعت، با مساله‌هایی مواجه می‌شود که ناچار است راه‌حل‌هایی برای آن‌ها پیدا کند. و در روان‌شناسی امروز، هیچ مساله‌ای را بدون آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال، نمی‌توان حل کرد.

انسان نمی‌تواند به مساله‌های اقتصادی بی‌توجه باشد، زیرا پیشرفت آیندهٔ او به همین موضوع مربوط می‌شود. و مگر می‌شود مساله‌های مطرح در علم اقتصاد را، از روش‌های آماری دور نگه داشت؟ حتا یک بررسی مقدماتی، ناممکن بودن این امر را نشان می‌دهد. در واقع، در هرگونه برنامه‌ریزی اقتصادی، باید انواع پیش‌آمدهای تصادفی را به حساب آورد و، برای این منظور، براساس تجربهٔ گذشته، دربارهٔ آینده داوری کرد. حتا برای باز کردن فروشگاه‌های تازه، باید از نیازهای مردم اطلاع داشت. بدون روش‌های آماری، نمی‌توان تغییر جمعیت، نیازهای آن‌ها و نحوهٔ پراکندگی آن‌ها را پیش‌بینی کرد و، بدون این پیش‌بینی‌ها، نمی‌توان دانست به چه سازمان‌هایی از قبیل مدرسه،

بیمارستان، فروشگاه، کارخانه، خیابان، مترو و غیر آن نیاز داریم.

نقش آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال در کارهای مهندسی، مدیریت تولید، اقتصاد کشاورزی، حمل و نقل و ارتباطات، چنان روشن است که نیازی به بحث تفصیلی دربارهٔ آن‌ها نیست. حل مساله‌هایی مثل کنترل ترافیک هوایی، اجازهٔ فرود و زمان توقف آن‌ها در فرودگاه، یا رفت و آمد کشتی‌ها، قطارها و ترافیک شهری و یا تلفن و شبکه‌های برق، بدون یاری آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال ممکن نیست. تنها یک نمونه می‌آوریم.

در ده دقیقهٔ آینده، چند نفر تصمیم می‌گیرند با تلفن خود صحبت کنند؟ به این پرسش، نمی‌توان پاسخی مشخص و قطعی داد. نمی‌دانیم و نمی‌توانیم بدانیم، از صاحبان تلفن، چند نفر تصمیم می‌گیرند، در این فاصلهٔ زمانی، تلفن کنند. درواقع، در مرکز کنترل تلفن روشن می‌شود، در فاصله‌های زمانی برابر، تعداد تلفن‌های مشغول، نوسان‌های بی‌اندازه زیادی دارد. ولی بدون آگاهی از قانونی که، طبق آن، بتوان تعداد تلفن‌های اشغال شده را پیش‌بینی کرد، نمی‌توان به برنامه‌ریزی دست زد. نظم کار تلفن‌ها هم، بستگی به این برنامه‌رزیزی دارد. دوباره به بررسی فرآیندهای تصادفی نیاز پیدا می‌کنیم، تنها این‌بار، برای برنامه‌ریزی ارتباط‌های تلفنی. تصورهای کلاسیک دربارهٔ حاکمیت قانون‌های قطعی، دقیق و ثابت بر طبیعت را، تنها می‌توان نخستین گام به‌سوی حقیقت دانست. حقیقتِ جریان‌ها، خیلی پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان آن‌ها را، با بیان چند قانون بی‌تغییر و جاودانی توضیح داد. گام دوم را، برای نزدیک‌تر شدن به حقیقت، تنها با تکیه بر آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال می‌توان برداشت. همهٔ ما و در هر موقعیتی که هستیم، باید این نکته را درک کنیم: هیچ چیز جزمی و ثابت وجود ندارد و هیچ قانونی را نمی‌توان ابدی دانست. ما می‌توانیم با روش‌های علمی، و امروز با روش‌های آمار ریاضی و نظریهٔ احتمال، گام به گام به حقیقت نزدیک‌تر شویم، ولی هرگز به آن نمی‌رسیم.

*۳§. نظریهٔ اطمینان بخشی[1]

سدهٔ بیستم، این قانون‌مندی را تایید کرد که: ریاضیات با پیدا کردن کاربردهای خود در اقتصاد و صنعت و در پدیده‌هایی از طبیعت، که پیش از آن در جریان بررسی عددی و کمیتی قرار نگرفته بودند، انگیزه‌هایی برای تکامل بعدی خود به دست آورد. درنتیجه، این امکان پیدا شد که جهان دور و بر ما، ژرف‌تر، کامل‌تر و دقیق‌تر بررسی شود؛ درعین حال، خود ریاضیات توانست دنیای بی‌کرانی از مساله‌های تازه را، در عمل پیدا کند. «شناخت» مرزی و پایانی ندارد؛ با گذشت زمان، همواره مساله‌های تازه‌ای در برابر ریاضیات مطرح می‌شود و، ریاضیات، ابزار لازم را برای حل این مساله‌ها فراهم می‌کند.

جهت‌های تازهٔ بررسی‌های کاربردی را با عنوان «نظریهٔ اطمینان بخشی» می‌شناسند. این نظریه، به‌دلیل رشد بی‌سابقهٔ نقش صنعت و دستگاه‌های فنی در همهٔ جنبه‌های فعالیت جامعه، به وجود آمده است. سلامتی و حتا امکان وجود تودهٔ عظیمی از مردم، به طور مستقیم، با دستگاه‌های صنعتی بستگی دارد. به عنوان نمونه: هواپیمای مسافری زمان ما که قادر است صدها مسافر را جابه‌جا کند، پاسخ‌گوی زندگی امروزی است. با کمال تاسف، پیش می‌آید که مجموعه‌ای از علت‌ها، منجر به اختلال‌هایی در کار هواپیما می‌شود و حادثه‌ای اندوه‌بار می‌آفرینند. بسیاری از تولیدهای شیمیایی و نیروگاه‌ها (اتمی، حرارتی یا هیدروالکتریکی)، اطمینان‌بخشی مطلق ندارند و می‌توانند از کنترل خارج شوند و، بنابراین، در طول زمان می‌توانند موجبی برای سانحه‌ها و پیش‌آمدهای ناگوار باشند.

طبیعی است از خودمان بپرسیم: آیا می‌توان چنین فاجعه‌هایی را پیش‌بینی کرد و آیا نمی‌توان، دست‌کم احتمال وقوع آن‌ها را پایین آورد و اثر فاجعه‌آمیز

۱ـ بخش بسیار کوتاهی از مقالهٔ بلندبوریس گنه‌دنکو (متولد ۱۹۱۲) به نام «ریاضیات و مساله‌های مربوط به اطمینان بخشی و بی‌خطرسازی صنعت امروز».

آن را کم کرد؟ این، همان پرسش اساسی است که در برابر نظریهٔ اطمینان‌بخشی و عمل آن قرار دارد. و باید پاسخ مثبت به آن داد: این فاجعه‌ها را می‌توان پیش‌بینی کرد و زیان‌های ناشی از آن‌ها را کاهش داد. البته در این زمینه، نباید بی‌مسئولیتی، بی‌صلاحیتی و بی‌تفاوتی افراد مسئول را نادیده گرفت و به آن بها نداد.

در یک مسالهٔ ریاضی، روش کار و شیوهٔ برخورد ما برای حل آن، بیشتر از محاسبه‌های عادی اهمیت دارد. در زندگی، هم با پدیده‌های قطعی سروکار داریم و هم با پدیده‌های تصادفی. اگر یک فراوردهٔ صنعتی مثل تلویزیون، خودرو سواری، زیپ پیراهن، خودکار و غیره، به تعداد زیادی تهیه شود، آیا می‌توان دربارهٔ زمان کار آن‌ها، به‌طور دقیق و قطعی صحبت کرد! تجربهٔ طولانی انسان، نشان داده است که، به این پرسش، نمی‌توان پاسخ مثبت داد: فراورده‌هایی که به‌ظاهر در شرایط یکسان تهیه می‌شوند، طول عمرهای متفاوتی دارند. برای همگان روشن است، اگر تلویزیونی خریداری کنید، هیچ کس نمی‌تواند دربارهٔ کار طولانی و مطمئن آن، به شما تضمین بدهد. پیش می‌آید (و نه‌چندان نادر) که ناچار می‌شوید، بلافاصله بعد از خرید، به مرجعی که کار آن را ضمانت کرده است مراجعه کنید و از او بخواهید، تلویزیون شما را به صورتی مطلوب به‌کار بیندازد. در عین حال، پیش می‌آید که تلویزیون شما، بعد از خرید، سال‌ها کار کند، بدون این‌که نیازی به تعمیر داشته باشد.

این پراکندگی تصادفی در میزان کار مفید، به‌ناچار، نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی را، به عنوان ابزاری برای حل مساله‌های مربوط به نظریهٔ اطمینان بخشی مطرح می‌کند. بنابراین، ضمن حل مساله‌های مربوط به کار بی‌وقفه و طولانی یک محصول، به‌جای یک عدد مشخص، به یک پراکندگی احتمالی به عنوان جواب می‌رسیم؛ یعنی به مقدارهای ممکن و احتمالی هریک از آن‌ها. با وجود این، می‌توان به یاری معیارهایی که وجود دارد، احتمال مواجه شدن با خرابی دستگاه را، تا حد دلخواه، کم کرد و پراکندگی (و یا دقیق‌تر: احتمال

وقوع کمیت‌های تصادفی) مربوط به کار دستگاه را پایین آورد. دراین‌باره، امکان‌های نظریهٔ اطمینان‌بخشی عظیم است . . .

به‌یاری مشاهده‌های آماری، نتیجه‌های جدی دیگری هم به‌دست می‌آید. در کارهای مهندسی و اقتصادی، اغلب می‌توان به نیاز اطمینان مطلق برای یک فراورده برخورد کرد. چنین درخواستی را، مثلاً می‌توان از جانب سفارش‌دهندگان صنعت هواپیماسازی شنید. تولیدکنندگان کالا، شرط اطمینان مطلق و ایمی کامل را می‌پذیرند، ولی آن را اجرا نمی‌کنند و نمی‌توانند اجرا کنند. در واقع، این درخواست، با طبیعت ماده در تضاد است. ساختمان مولکولی ماده و اختلاف‌های موضعی در استقرار اتم‌ها و، همچنین، تغییرهای اندکی که، ضمن آماده کردن کالا، در اثر نظام حرارتی و تاثیرهای مکانیکی، در آن پیش می‌آید، منجر به ویژگی‌های مختلف و پراکنده در محصول می‌شود . . .

به این ترتیب، آرزوی بسیاری از مهندسان و اقتصاددانان، برای ساختن دستگاه‌های مکانیکی، که استحکام و طرحی یکسان داشته باشند، عملی نیست. آرزوی اینان این است که، در یک دستگاه مکانیکی، همهٔ قطعه‌ها و همهٔ نقطه‌های اتصال، دوامی یکسان داشته باشند و، بعد از زمان مقرر کار، یکباره و با هم خراب شوند و از کار بیفتند. برای چنین دستگاهی، وجود سازمانی برای تعمیر ضرورت ندارد: تمامی قطعه‌ها و اتصال‌های دستگاه با طول عمری برابر کار می‌کنند و، بعد، وقتی عمر همهٔ آنها با هم به پایان رسید، دستگاه از کار باز می‌ماند و، آن‌وقت، باید دستگاه تازه‌ای به‌جای آن آغاز به کار کند. ولی در واقع با طول عمرهای متفاوت و تصادفی برای قطعه‌ها و اتصال‌ها سروکار داریم؛ از این گذشته، در شرایط بهره‌برداری هم پراکندگی وجود دارد و، در نتیجه، این آرزو و اندیشهٔ دل‌فریب بر باد می‌رود.

از این‌جا، نتیجهٔ اساسی دیگری هم به‌دست می‌آید: ابزار اصلی ریاضی که می‌تواند در نظریهٔ اطمینان بخشی به یاری گرفته شود، نظریهٔ احتمال و

آمار ریاضی است و این، چهرهٔ اصلی ریاضیات پایان سدهٔ بیستم را به ما می‌شناساند . . . زندگی و عمل، که در گذشته، مساله‌های تاریخی مهم و تازه‌ای را در برابر ریاضیات گذاشته است، در زمان ما هم همین نقش را به عهده دارد و در آینده هم برعهده خواهد داشت. بررسی‌های نظری، درضمن، راه آزمایش گران را روشن می‌کند و به آن‌ها امکان می‌دهد تا پژوهش‌های تجربی خود را در مسیری انجام دهند که دورنما و هدف آن را می‌شناسند.

نظریهٔ اطمینان بخشی، بر تکامل ریاضیات هم اثر گذاشته و شاخه‌های تازه‌ای را برای پژوهش مطرح کرده است: تکامل نظریهٔ جمع‌بندی تعدادی تصادفی از کمیت‌های تصادفی، پیشرفت و تکامل آمار ریاضی در رابطه با کاربرد آن در نظریهٔ اطمینان بخشی، پدید آمدن مساله‌های تازه‌ای در بهینه‌سازی، ضرورت بررسی شکل‌های تازهٔ روندهای تصادفی و غیره . . .

ریاضیات دانشی پویا است، هرگز در جای خود نمی‌ایستد و در بستگی تنگاتنگ با سایر دانش‌ها، رو به جلو دارد و تکامل می‌یابد. پیشرفت ریاضیات، به این جهت نمی‌تواند متوقف شود که، زندگی اجتماعی، به طور دایم در تغییر است و در تمامی جنبه‌های خود ـ صنعت، اقتصاد، اقتصاد کشاورزی ـ نمی‌تواند در چارچوب معینی، زندانی بماند. صنعت‌های تازه و شیوه‌های صنعتی تازه پدید می‌آید و فراورده‌هایی تولید می‌شود که، پیش از آن، برای ما ناشناخته بود و برای کار با آن‌ها و بهتر کردن و ساده‌تر کردن روند تولید آن‌ها، باید ویژگی‌های آن‌ها را شناخت و طبیعی است که، برای این منظور، باید روش‌های تازه‌ای پیدا کرد تا بتوان مساله‌های تازه را حل کرد . . . پیشرفت، یعنی توانایی در برخورد با مساله‌ها و موضوع‌های تازه و توانایی در جست‌وجوی روش‌های علمی تازه برای حل دشواری‌های آن‌ها . . . ریاضیات در زمان ما، نقشی جدی و اساسی دارد و، بنابراین، دانش‌آموزان باید، در کنار آموزش روش‌های کهنه، یاد بگیرند که با مطالعهٔ علمیِ جهان دور و بر خود، روش‌های تازه‌ای برای حل مساله‌های موجود پیدا کنند.

§۴. قراردادها و تعریف‌های نخستین در آمار

۱. نمادی برای مجموع و حاصل‌ضرب. در ریاضیات، برای نشان دادن مجموع، بیشتر از حرف لاتینی S و حرف یونانی $\sum$ استفاده می‌کنند، ولی هرکدام از این دو حرف کاربرد جداگانه‌ای دارند. فرض کنید بخواهیم مجموع توان‌های kام n عدد طبیعی از ۱ تا n را نشان دهیم. این مجموع را می‌توان S_k معرفی کرد:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \qquad (1)$$

با این قرارداد، اگر جایی با S_1 یا S_2 و غیره روبه‌رو شویم، معنای آن را می‌فهمیم:

$$S_1 = 1+2+3+\ldots+n;\; S_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2;\; \ldots$$

ولی برابری (۱) را هم می‌توان به صورتی کوتاه‌تر نوشت:

$$S_k = \sum_{n=1}^{n} n^k \quad (n \in \mathbf{N})$$

$\sum n^k$، یعنی مجموع همهٔ جمله‌های به‌صورت n^k؛ عددهایی که در زیر و بالای نماد $\sum$ آمده است، نشان می‌دهد که این جمله‌ها را از کجا آغاز کنیم و در کجا پایان دهیم. به این ترتیب، مثلاً $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$، به معنای مجموع جمله‌های x_1، x_2، x_3، ...، x_n است:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

به همین ترتیب، برای نشان دادن حاصل‌ضرب، از نمادهای P و Π استفاده می‌کنند:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

روشن است که از نمادهای $\sum$ و Π، وقتی می‌توان به این صورت استفاده کرد که توان یا اندیس جمله‌ها، عددی طبیعی باشد.

یادداشت. توجه کنید: در ریاضیات یا فیزیک، از نمادهای S و P، به منظورهای دیگری هم استفاده می‌کنند، مثلاً S را برای نشان دادن مساحت یک شکل و P را برای نشان دادن پیرامون یک شکلِ واقع بر صفحه هم به کار می‌برند. جایی که نماد به کار رفته است، به خودی خود، معنا و مفهوم آن را روشن می‌کند.

مثال ۱. معادلهٔ درجه سوم $x^۳ - ۶x^۲ + ۱۱x = ۶$ سه ریشهٔ حقیقی دارد (خودتان معادله را حل کنید و سه ریشهٔ آن را پیدا کنید). می‌خواهیم مجموع حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی ریشه‌ها را با نماد $\sum$ و حاصل‌ضرب سه ریشه را با نماد Π نشان دهیم.

حل. مجموع حاصل‌ضرب‌های دو به دوی ریشه‌ها را می‌توان این‌طور نشان داد:

$$x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + x_۲x_۳ = \sum_{\substack{i,j=۱ \\ i<j}}^{۳} (x_i x_j)$$

x_i یا x_j، معرف یکی از ریشه‌ها و x_ix_j معرف حاصل‌ضرب دو ریشه است. چون فقط ۳ ریشه داریم، i و j می‌توانند عددهای از ۱ تا ۳ را بپذیرند. درضمن، برای این‌که، این حاصل‌ضرب‌های دو به دو، هرکدام یک بار نوشته شوند، شرط $i < j$ را هم زیر نماد $\sum$ گذاشته‌ایم (تا گمان نرود که مثلاً هر دو جملهٔ $x_۲x_۳$ و $x_۳x_۲$ وجود دارد). برای حاصل‌ضرب سه ریشه، می‌توان نوشت:

$$x_۱x_۲x_۳ = \prod_{i=۱}^{۳} x_i$$

۲. میانگین‌ها. در جلدهای پیشین «ریاضیات محاسبه‌ای»، بارها با

میانگین‌ها سروکار داشته‌ایم. از بین گونه‌های مختلف میانگین‌ها، میانگین حسابی و میانگین هندسی را می‌شناسید: *میانگین حسابی n عدد، برابر است با $\frac{1}{n}$ مجموع آن‌ها و میانگین هندسی n عدد مثبت، برابر است با ریشهٔ nام حاصل‌ضرب آن‌ها.* اگر میانگین حسابی n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را با $\overline{a}$ و میانگین هندسی آن‌ها را با A نشان دهیم، آن‌وقت

$$\overline{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i;$$

$$A = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \prod_{i=1}^{n}(a_i)^{\frac{1}{n}}$$

وقتی، به طور مطلق، از میانگین چند عدد صحبت بشود، منظور میانگین حسابی آن‌ها است. گاهی هم، بسته به ضرورت، از میانگین حسابی قدرمطلق عددها، یا از میانگین حسابی مجذورهای آن‌ها استفاده می‌شود.

درضمن، برای میانگین حسابی و میانگین هندسی n عدد مثبت، همیشه داریم:

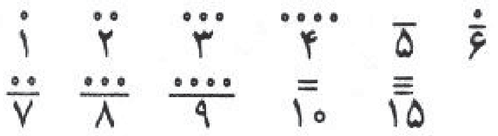
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

نشانهٔ برابری تنها وقتی برقرار است که همهٔ عددها با هم برابر باشند. این نابرابری را برای حالت‌های $n = 2$ و $n = 3$ دیده‌ایم. برای اثبات آن در حالت کلی، باید اندکی صبر داشته باشیم.

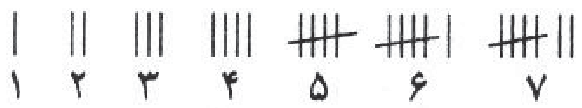
۳. چگونه بشماریم؟ قوم «مایا»، ساکنان بومی مکزیک کنونی، پیش از هجوم غدارانهٔ اروپاییان به سرزمین امریکا، به مرحلهٔ کم و بیش بالایی از تمدن رسیده بودند و، به‌جز زمینه‌های دیگر، به‌ویژه در اخترشناسی و ریاضیات دست‌آوردهای جالب و گاه کم‌نظیری داشته‌اند. مهاجمان، نه‌تنها مردم آرام و صلح‌دوست را، به صورتی گسترده، کشتند، روند زندگی اجتماعی آن‌ها را به هم زدند و راه پیشرفت تکاملی آن‌ها را بستند، همهٔ اثرهای هنری، ساختمانی و

نوشتاری آن‌ها را هم از بین بردند و امروز، باتوجه به اندک سندهای باقی‌مانده می‌توان دربارهٔ سطح دانش و آگاهی این قوم داوری کرد.

عددشماری و عددنویسی قوم مایا، بر مبنای ۵ بوده است (عدد شماری امروز یا دهدهی، در مبنای ۱۰ است) و عددهای نخستین را، به تقریب این‌طور می‌نوشتند.

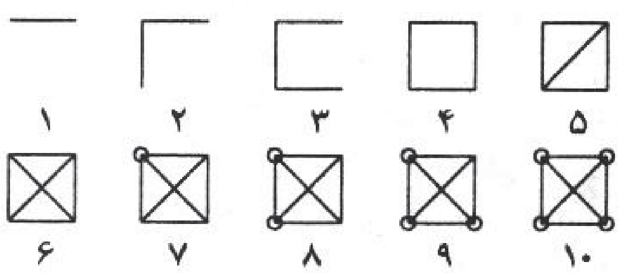


این شیوه نوشتن، با اندک تفاوت‌هایی، بین بیشتر قوم‌ها، در آغاز رو آوردن به عددنویسی معمول بوده است. به این‌گونه نوشتن عددها «نشان» یا «خط و نشان» و گاهی «چوب خط» می‌گفتند. نوشتن عددها را، به یاری «خط و نشان» به این ترتیب هم می‌توان در نظر گرفت که در بین برخی قوم‌ها معمول بوده است.

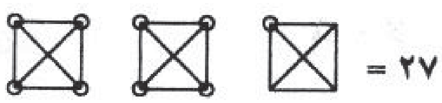


در واقع، در این‌جا هم، خط و نشان‌ها، براساس مبنای ۵ در نظر گرفته شده است.

ولی اگر بخواهیم «خط و نشان» را در مبنای ۱۰ در نظر بگیریم (که درضمن، با عددشماری امروز ما سازگار باشد)، بهتر است عددها را این‌طور در نظر بگیریم:



در این صورت، به عنوان نمونه عدد ۲۷، این‌طور نوشته می‌شود:



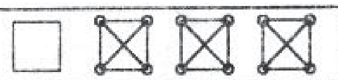
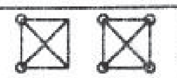
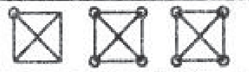
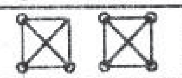
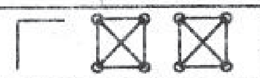
این شیوهٔ نوشتن چه فایده‌ای دارد؟ فرض کنید، یک گردهم‌آیی از پنج شهرستان کرمان (شهرهای کرمان، سیرجان، رفسنجان، بَم و جیرفت) که ۱۲۰ دبیر ریاضی در آن شرکت دارند و دربارهٔ شیوهٔ آموزش ریاضی تبادل‌نظر می‌کنند، تشکیل شده باشد. شما می‌خواهید آماری تهیه کنید که، در آن، تعداد دبیران ریاضی هر شهر معین باشد. به آماری که در دبیرخانهٔ گردهم‌آیی وجود دارد، دسترسی ندارید و ناچارید آمار خود را، باتوجه به کارتی که هر شرکت‌کنندهٔ در گردهم‌آیی، بر سینهٔ خود نصب کرده و نام شهر او در آن نوشته شده است، به دست آورید. چه می‌کنید؟ یک راه این است که در سالن محل گرد هم‌آیی، پنج بار از جلو شرکت‌کنندگان عبور کنید و، هر بار، دبیران یکی از شهرها را بشمارید. ولی این راه، به‌جز این‌که ممکن است نظم سالن را به هم بزند، کاری چندان ساده نیست و اگر مثلاً تعداد شهرها ۲۰ و تعداد شرکت‌کنندگان ۶۰۰ نفر باشد، برای ۲۰ بار مراجعه به تک‌تک شرکت‌کنندگان، وقت زیادی از شما می‌گیرد و گاهی کار را غیر عملی می‌کند.

در موقعیتی که دارید، بهترین راه این است که از پیش، جدولی به این صورت آماده کنید:

کرمان	
سیرجان	
رفسنجان	
بم	
جیرفت	

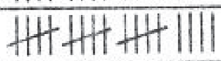
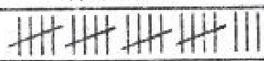
وقتی یکی از نشست‌های گردهم‌آیی تمام می‌شود، دم در خروجی بایستید و، با خروج هر فرد، نشان لازم را جلو شهر او بگذارید. مثلاً جدول شما به این

صورت پر می‌شود:

کرمان		۳۴
سیرجان		۱۸
رفسنجان		۲۷
بم		۱۹
جیرفت		۲۲

جدول ۱

اگر همین جدول را با خط و نشان‌های مربوط به مبنای ۵ تنظیم می‌کردیم، چنین می‌شد:

کرمان		۳۴
سیرجان		۱۸
رفسنجان		۲۷
بم		۱۹
جیرفت		۲۲

جدول ۲

در ستون سمت چپ جدول، تعداد دبیران هر شهر آمده است که، در آمار، به آن **فراوانی یا بسامد** گویند.

اگر محدوده‌ای از یک جنگل انبوه را معین کنند و از شما بخواهند، تعداد هر نوع درخت را در این محدوده معین کنید، بهترین راه (و به احتمالی تنها راه) این است که از چنین جدول‌هایی استفاده کنید. البته، در این‌جا، از قبل نمی‌دانید به چه نوع درخت‌هایی برمی‌خورید. در جدول خود، ستون‌های زیادی در نظر می‌گیرید. فرض کنید، نخستین درختی که در برابر شما است، بلوط باشد، در نخستین ستون جدول، در ستون سمت راست، نام بلوط را می‌نویسید و نشان مربوط به آن را در جلو واژهٔ بلوط قرار می‌دهید. هروقت به درخت تازه‌ای و مثلاً چنار برخوردید، سطر بعدی را به آمار چنار اختصاص



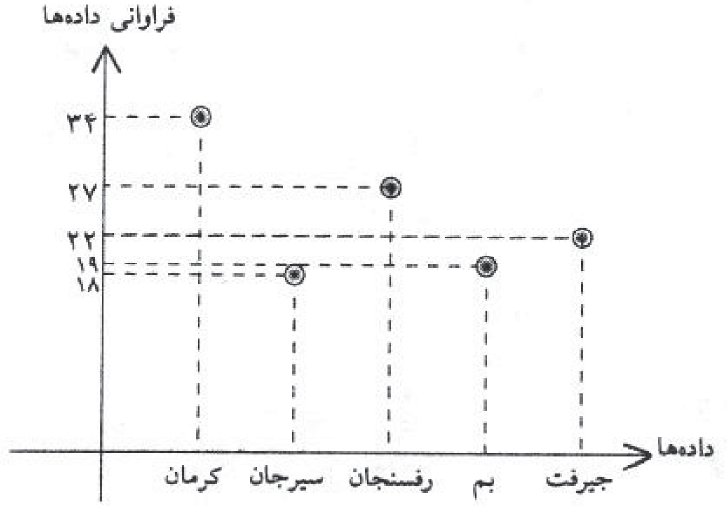
شکل ۱

می‌دهید و غیره. تا آن‌جا پیش می‌روید که همهٔ درخت‌های این محدوده را آمارگیری کرده باشید. به این ترتیب، **میزان فراوانی** هر نوع درخت (و درضمن تعداد کل درخت‌ها) در این محدوده معین می‌شود.

در جدولی که برای تعداد دبیران ریاضی شرکت کننده در گردهم‌آیی استان کرمان تشکیل دادیم، عددهای ۳۴، ۱۸، ۲۷، ۱۹ و ۲۲ را، **داده‌های آماری** و فاصلهٔ بین ۱۸ تا ۳۴ را، **دامنهٔ داده‌ها** گویند. دامنهٔ داده‌ها نشان می‌دهد که تعداد دبیران هر شهر عددی است که از ۱۸ کمتر و از ۳۴ بیشتر نیست.

۴. نمودار داده‌ها. داده‌های آماری مربوط به یک موضوع را با شیوه‌های مختلف، می‌توان به صورت هندسی یا نموداری نشان داد.

یکی از راه‌های نمایش داده‌های آماری، نمایش دایره‌ای است. در شکل ۱، نمایش دایره‌ای داده‌های آماری مربوط به دبیران شرکت‌کننده در گردهم‌آیی را می‌بینید. درضمن، در قطاع‌های این دایره (که هرکدام، نمایندهٔ سهم یک شهر است)، درصدها هم مشخص شده است. به عنوان نمونه، از شهر کرمان، ۳۴ دبیر شرکت کرده است، ۳۴ نفر از ۱۲۰ نفر، بنابراین



شکل ۲

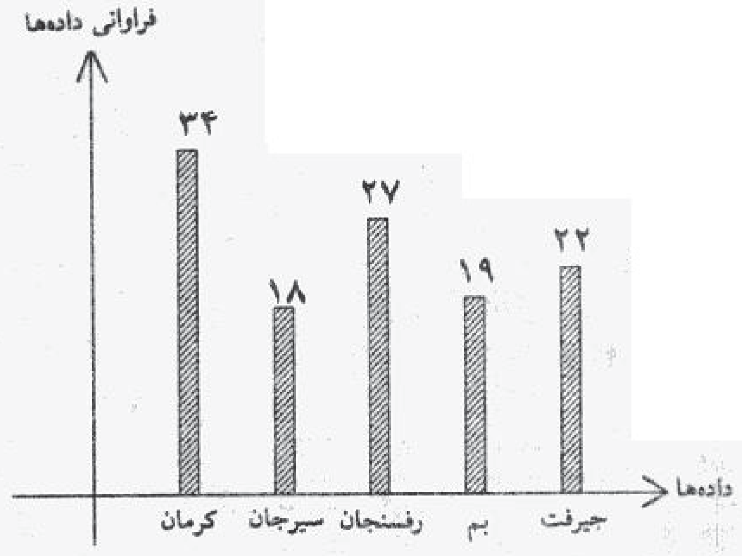
$$\frac{۳۴}{۱۲۰} \times ۱۰۰ \approx ۲۸/۳$$

اندکی بیش از ۲۸/۳ درصد شرکت‌کنندگان، از شهر کرمان بوده‌اند.

داده‌های آماری را به‌وسیلهٔ نقطه‌های واقع بر دستگاه محورهای مختصات هم می‌توان نشان داد (شکل ۲).

ولی بهترین و معمول‌ترین روش نمایش داده‌های آماری، نمودار ستونی آن‌ها است. در شکل ۳، نمودار ستونی داده‌های آماری، به صورت ستونی نشان داده شده است. در این شکل، عدد فراوانی هر داده را روی ستون نوشته‌ایم که، در این صورت، می‌توانستیم محور «فراوانی‌ها» را رسم نکنیم. همچنین می‌توانستیم، با درجه‌بندی محور «فراوانی‌ها» از ذکر عددها در روی ستون‌ها خودداری کنیم.

۵. رده‌بندی یا دسته‌بندی داده‌های آماری و فراوانی‌ها، میانگین و انحراف از میانگین. نمونه‌ای که در بالا، به‌صورت جدول و سه نوع نمودار از داده‌های آماری آوردیم، نمونه‌ای ساده بود. آمارگیر هم توقع زیادی از داده‌های آماری نداشت. او می‌خواست بداند از هر شهر استان، چند نفر در گردهم‌آیی شرکت کرده‌اند؛ درضمن توانست به سادگی محاسبه کند که شرکت‌کنندگان هر شهر،



شکل ۳

چند درصد کل شرکت‌کنندگان را تشکیل داده‌اند.

ولی از داده‌های آماری، در حالت‌های پیچیده‌تر هم می‌توان استفاده کرد. طبیعی است، هرچه مطلب پیچیده‌تر باشد، باید آگاهی‌های بیشتری دربارهٔ موضوع به‌دست آید تا، براساس آن‌ها، بتوان دربارهٔ چند و چون موضوع از جنبه‌های مختلف داوری کرد. این‌جاست که به تعریف‌ها و قراردادهای تازه‌ای نیاز داریم. با یک مثال مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال ۲. بهروز در ۱۵ امتحان آخر سال، این نمره‌ها را آورده است:

جبر	هندسه	فیزیک	شیمی	زیست‌شناسی	گیاه‌شناسی	آشنایی با صنعت
۱۷	۱۹	۱۸	۱۰	۱۲	۱۵	۱۱
موسیقی	زبان بیگانه	نقاشی	ادب فارسی	ورزش	کارهای نمایشی	
۸	۱۴	۷	۹	۱۳	۲	
روزنامهٔ دیواری	روحیهٔ اجتماعی و شرکت‌درکارجمعی					
۷	۹					

از این داده‌های آماری، می‌توان نتیجه‌های گوناگونی گرفت:

۱) *معدل میانگین نمره‌ها.* اگر مجموع همهٔ نمره‌ها را بر تعداد آن‌ها

تقسیم کنیم:

$$\text{معدل} = \frac{\text{مجموع نمره‌ها}}{\text{تعداد درس‌ها}} = \frac{۱۷۱}{۱۵} = ۱۱/۴$$

در آمار، به این عدد، **میانگین حسابی** یا به طور ساده **میانگین داده‌ها** می‌گویند.

۲) *رده‌بندی نمره‌ها.* نمره‌ها را به ترتیب‌های مختلفی می‌توان رده‌بندی کرد. به این جدول توجه کنید:

رده‌بندی نمره‌ها	فراوانی	میانگین فراوانی	انحراف میانگین از مرکز
از ۰ تا کمتر از ۵	۱	۲	۹/۴−
از ۵ تا کمتر از ۱۰	۵	۸	۳/۴−
از ۱۰ تا کمتر از ۱۵	۵	۱۲	۰/۶
از ۱۵ تا ۲۰	۴	۱۷/۲۵	۵/۸۵

جدول ۳

در این جدول، نمره‌ها با فاصله برابر ۵ (۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و غیره)، به ۴ رده تقسیم شده‌اند و نمرهٔ میانگین هر رده در جای خود آمده است. مثلاً در ردهٔ سوم، ۵ نمره وجود داشت: ۱۰ (شیمی)، ۱۲ (زیست‌شناسی)، ۱۱ (آشنایی با صنعت)، ۱۴ (زبان بیگانه)، ۱۳ (ورزش) که میانگین آن‌ها برابر است با

$$\frac{۱۰ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۴ + ۱۳}{۵} = ۱۲$$

میانگین همهٔ نمره‌ها، برابر ۱۱/۴ بود که به آن، **مرکز** هم می‌گویند. پس میانگین نمره‌های ردهٔ سوم به اندازهٔ

$$۱۲ - ۱۱/۴ = ۰/۶$$

از مرکز *انحراف* دارد. اگر میانگین همهٔ نمره‌ها را با $\overline{x}$ نشان دهیم:

$$(\overline{x} = ۱۱/۴)$$

و هریک از نمره‌ها را x_i بنامیم (از $x_۱$ یا $x_{۱۵}$)، آن وقت انحراف از مرکز برای هر نمره برابر است با $x_i - \overline{x}$، مثلاً

$$x_۱ - \overline{x} = ۱۷ - ۱۱/۴ = ۵/۶;\ x_۲ - \overline{x} = ۱۰ - ۱۱/۴ = -۱/۴;\ \ldots$$

روشن است، اگر همهٔ انحراف‌های از مرکز را، برای ۱۵ نمره، به‌دست آوریم، جمع جبری آن‌ها، برابر صفر می‌شود. از جدول ۳ هم می‌توان این نتیجه را به‌دست آورد. در ردهٔ اول ۱ نمره داریم و انحراف آن از مرکز برابر ۹/۴− است. در ردهٔ دوم ۵ نمره وجود دارد که انحراف هریک برابر ۳/۴− و مجموع انحراف‌های این ۵ نمره برابر ۳/۴− × ۵ یعنی ۱۷− است. مجموع انحراف‌ها در ردهٔ سوم برابر ۰/۶ × ۵، یعنی ۳ و در ردهٔ چهارم برابر ۵/۸۵ × ۴ یعنی ۲۳/۴ است و

$$-۹/۴ - ۱۷ + ۳ + ۲۳/۴ = ۰$$

ولی اگر، به‌جای مقدار جبری، قدر مطلق انحراف‌ها را در نظر بگیریم، برای مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$۹/۴ + ۱۷ + ۳ + ۲۳/۴ = ۵۲/۸$$

که از تقسیم آن بر تعداد داده‌ها (۱۵) [همان مجموع فراوانی]، عددی به دست می‌آید که به آن **انحراف میانگین** می‌گویند:

$$\text{انحراف میانگین} = \frac{۵۲/۸}{۱۵} = ۳/۵۲$$

عددی که از تقسیم مجموع مجذورهای انحراف‌ها بر تعداد داده‌ها به‌دست می‌آید، **پراش داده‌ها** (یا **واریانس داده‌ها**) نامیده می‌شود. در مثال ما

$$\text{پراش داده‌ها} = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i - \overline{x})^۲}{۱۵} =$$

$$= \frac{۹/۴^۲ + ۵ \times ۳/۴^۲ + ۵ \times ۰/۶^۲ + ۴ \times ۵/۸۵^۲}{۱۵} =$$

$$\frac{۸۸/۳۶ + ۵۷/۸ + ۱/۸ + ۱۳۶/۸۹}{۱۵} =$$

$$= \frac{۲۸۴/۸۵}{۱۵} = ۱۸/۹۹ \approx ۱۹$$

ولی در آمار ریاضی، بیشتر از **انحراف معیار** استفاده می‌شود که برابر است با ریشهٔ دوم پراش. انحراف معیار را، معمولاً با s نشان می‌دهند:

$$s = \sqrt{۱۹} \approx ۴/۳۵$$

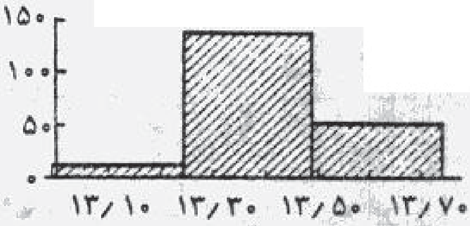
باتوجه به جدول ۳ (رده‌بندی نمره‌ها با فاصلهٔ برابر ۵)، نمودار دایره‌ای و نمودار ستونی را خودتان رسم کنید.

می‌توانستیم رده‌بندی را برحسب نوع درس‌ها انجام دهیم: ریاضی فیزیک (جبر، هندسه، فیزیک)؛ تجربی (شیمی، زیست‌شناسی، گیاه‌شناسی)؛ هنر (موسیقی، نقاشی، کارهای نمایشی، روزنامهٔ دیواری)، انسانی (زبان بیگانه، ادب فارسی)؛ روحیه اجتماعی و کارهای فوق برنامه (آشنایی با صنعت، ورزش، شرکت در کارهای جمعی). خردتان جدولی برای این رده‌بندی تنظیم کنید و میانگین فراوانی و انحراف از مرکز را در آن مشخص کنید و، سپس، با محاسبهٔ میانگین ساده، پراش و انحراف معیار داده‌ها ببینید، به همان نتیجهٔ رده‌بندی جدول ۳ می‌رسید یا نه!

مثال ۳. از یک قطعهٔ فلزی با مقطع دایره‌ای، در یک کارخانه به تعداد زیاد تولید شده است. ۲۰۰ قطعه از آن را به تصادف انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم، داده‌های آماری را دربارهٔ قطر این قطعه‌ها (برحسب میلی‌متر) تشکیل دهیم.

در شکل ۴، جدول داده‌ها را با فاصلهٔ ۰/۲۵ میلی‌متر رده‌بندی کرده‌ایم و نمودار ستونی مربوط به آن را نشان داده‌ایم.

قطر	فراوانی
۱۳/۰۰ — ۱۳/۲۴	۱۱
۱۳/۲۵ — ۱۳/۴۹	۱۳۸
۱۳/۵۰ — ۱۳/۷۴	۵۱
مجموع	۲۰۰



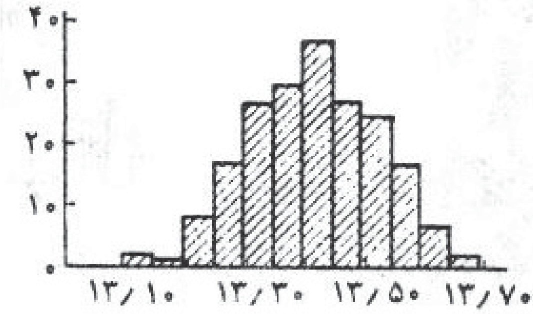
شکل ۴

در شکل ۵، پراکندگی قطرهای همین ۲۰۰ قطعه را همراه با نمودار ستونی آن، در رده‌بندی با فاصلهٔ ۰/۰۵ میلی‌متر داده‌ایم. درضمن، در جدول، میانگین حسابی $(\overline{x})$ و انحراف معیار هم داده شده است.

و سرانجام، در شکل ۶، نمودار پراکندگی قطر این ۲۰۰ قطعه با رده‌بندی به فاصلهٔ ۰/۰۱ میلی‌متر داده شده است (از آوردن جدول پراکندگی، به دلیل طولانی بودن آن، طرف‌نظر کرده‌ایم).

مثال ۳ را به این دلیل آوردیم که نکتهٔ جالبی را یادآور شویم. اغلب، وقتی داده‌های آماری، به تعداد زیاد و به صورت انبوه باشد، گرایش کلی به سمت مقدار میانگین است. فرض کنید، داده‌های آماری، مربوط به معدل دانش‌آموزان سه کلاس دوم دبیرستان باشد. اگر این دانش‌آموزان، به همان صورتی که برای ثبت‌نام مراجعه کنند، وارد کلاس شده باشند و شرطهایی (از نوع معدل بالا) برای ثبت‌نام وجود نداشته باشد، تعداد دانش‌آموزان ممتاز و تعداد دانش‌آموزانی که معدل پایین‌تر از حد متوسط (یعنی میانگین) دارند، نسبت به دانش‌آموزانی که معدل آن‌ها به میانگین کلاس نزدیک‌تر است، بسیار کمترند. به‌ویژه دربارهٔ تولید صنعتی و کشاورزی، این حکم بیشتر صادق است و نمودار پراکندگی، کم و بیش به صورت شکل ۶ درمی‌آید (به شرطی که داده‌های آماری، دست‌چین نشده و به صورت تصادفی انتخاب شده باشند).

قطر	فراوانی
۱۳/۰۵ — ۱۳/۰۹	—
۱۳/۱۰ — ۱۳/۱۴	۲
۱۳/۱۵ — ۱۳/۱۹	۱
۱۳/۲۰ — ۱۳/۲۴	۸
۱۳/۲۵ — ۱۳/۲۹	۱۷
۱۳/۳۰ — ۱۳/۳۴	۲۷
۱۳/۳۵ — ۱۳/۳۹	۳۰
۱۳/۴۰ — ۱۳/۴۴	۳۷
۱۳/۴۵ — ۱۳/۴۹	۲۷
۱۳/۵۰ — ۱۳/۵۴	۲۵
۱۳/۵۵ — ۱۳/۵۹	۱۷
۱۳/۶۰ — ۱۳/۶۴	۷
۱۳/۶۵ — ۱۳/۶۹	۲

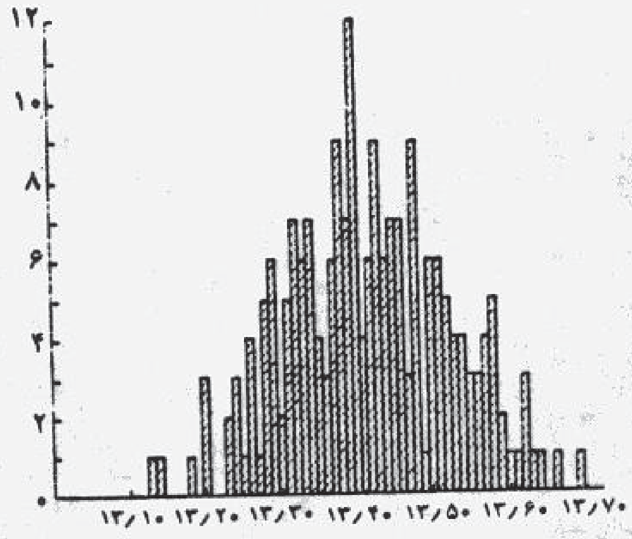


شکل ۵: جدول و نمودار پراکندگی قطر ۲۰۰ قطعه تولیدی با رده‌بندی به‌فاصله ۰/۰۵ میلی‌متر

فرض کنید، برای تلویزیون‌های ساخت یک کارخانه، عمر متوسط ۱۰ سال معین شده باشد. در این صورت، وقتی مثلاً ۱۰۰ تلویزیون را به تصادف انتخاب کنیم، تعدادی که کمتر از ۳ سال کار کنند و یا بعد از ۱۷ سال کار، همچنان سالم و بی‌عیب باشند، بسیار کمتر از آن‌هایی است که بین ۸ تا ۱۲ سال کار می‌کنند. این نکته در بحث‌های مربوط به آمار ریاضی اهمیت زیادی دارد.

§۵. احتمال

۱. **پیش‌آمد تصادفی.** عضو تیم شطرنج دبیرستان خود هستید. برای مسابقه با تیم‌های انتخابی دبیرستان‌های دیگر، باید در دبیرستان A حاضر شوید. مسابقه‌ها سر ساعت ۱۰ صبح آغاز می‌شوند. ۹ صبح از منزل بیرون می‌آیید. آیا به موقع به دبیرستان A می‌رسید؟ آیا زودتر به مقصد می‌رسید؟



شکل ۶: نمودار پراکندگی قطر ۲۰۰ قطعه با رده‌بندی به‌فاصله ۰/۰۱ میلی‌متر

آیا ممکن نیست، وقتی به محل A برسید که مسابقه‌ها آغاز شده باشند و، به دلیل نبودن شما، رقیبتان را برنده اعلام کنند؟ ... هیچ کس نمی‌تواند به این پرسش‌ها، پاسخی قطعی بدهد. تجربهٔ شما نشان داده است که، اگر وضع عادی باشد، باید به موقع به دبیرستان A برسید. ولی مگر همیشه وضع عادی است؟ عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند. میزان شلوغی رفت و آمد در خیابان‌ها، همیشه در تغییر است. آغاز حرکت و سرعت اتوبوس‌های شهری منظم و یکنواخت نیست. یک پیش‌آمد ناگهانی، مثل برخورد دو اتومبیل، می‌تواند موجب کندی و یا حتا توقف اتوبوسی شود که شما در آن نشسته‌اید. ممکن است در ایستگاه اتوبوس به یاد بیاورید، فراموش کرده‌اید کارت شناسایی را با خود بیاورید و ناچار شوید به منزل برگردید، و خیلی چیزهای دیگر. به همین دلیل می‌گویند: ساعت ورود شما به دبیرستان A، یک **پیش‌آمد تصادفی** یا یک **آزمون تصادفی** است.

هر پیش‌آمد تصادفی، نتیجه‌ای است از تاثیر مجموعهٔ بزرگی از عامل‌های تاثیرگذار. مکعب استخوانی کوچکی را در نظر بگیرید که روی شش وجه آن، عددهای از ۱ تا ۶ نوشته شده باشد (و روی هر وجه، یک عدد). از این به بعد، چنین مکعبی را «مکعب بازی» می‌نامیم. وقتی یک مکعب بازی را به

هوا پرتاب کنید، بعد از نشستن به زمین، وجهی از آن جلو چشمان شما قرار می‌گیرد. ولی کدام وجه؟ برای پیش‌بینی آن، باید از خیلی چیزها آگاه باشید و، درضمن، بتوانید همهٔ آن‌ها را در بستگی با هم، به حساب آورید: مسیر حرکت دستی که مکعب بازی را می‌اندازد، وضع و موقعیت مکعب در لحظهٔ پرتاب، نیروی پرتاب و غیره. تعداد این عامل‌های تاثیرگذار خیلی زیاد است و حتا، بسیاری از آن‌ها، برای ما ناشناخته است. به همین دلیل نمی‌توان از قبل پیش‌بینی کرد که، ضمن آزمایش، با چه پیش‌آمدی روبه‌رو می‌شویم!

وقتی جسمی را به یاری ترازو وزن می‌کنید، ممکن است گمان کنید، با این آزمایش، باید منتظر پیش‌آمدی قطعی و بی‌تغییر باشید: عقربهٔ ترازو روی عدد وزن جسم می‌ایستد. ولی در واقع، این‌طور نیست. عددی که عقربهٔ ترازو نشان می‌دهد، یک پیش‌آمد تصادفی است. اگر آزمایش را چند بار تکرار کنید، نتیجه‌های کم و بیش متفاوتی به‌دست می‌آورید. این اختلاف‌ها مربوط می‌شود به جای جسم در کفهٔ ترازو، اشتباه مشاهده، نشستن گردوغبار بر جسمی که وزن می‌کنید، اختلال‌های تصادفی دستگاه ترازو و غیره.

از خود واژهٔ «پیش‌آمد تصادفی» باید به این نتیجه برسیم که نمی‌توان رخ‌داد آن را در یک آزمایش مشخص، پیش‌بینی کرد. با وجود این، تجربه نشان می‌دهد، اگر آزمایشی را بارها و بارها تکرار کنیم، می‌توان برای پدیده‌های تصادفی، نوعی قانون‌مندی پیدا کرد؛ و کار نظریهٔ احتمال، پیدا کردن و بررسی همین قانون‌مندی‌هاست.

در روزگار ما، «نظریهٔ احتمال» و «نظریهٔ اطمینان‌بخشی»، که راه را برای به‌دست آوردن «بهترین و مناسب‌ترین» پاسخ، باز کرده‌اند، اهمیتی درجه اول دارند. امروز دیگر نمی‌توان، آموزش ریاضیات را، جدا از بحث مربوط به «کمیت‌های تصادفی»، کامل دانست. دانش وضعیت امروز، چنین می‌طلبد.

۲. فضای نمونه و فضای پیش‌آمد. اگر مکعبی را، که از نظر هندسی بی‌نقص و جرم آن در همه‌جا یکنواخت باشد، به هوا پرتاب کنیم، بعد از

رسیدن به زمین، می‌تواند روی هر وجه خود بنشیند و، این پیش‌آمد، برای هیچ‌کدام از وجه‌ها، نسبت به وجه‌های دیگر، برتری وجود ندارد. در واقع، رو شدن هر وجه مکعب، با رو شدن هر وجه دیگر، **هم احتمال** است، یعنی برای وجه‌ها، شانسی برابر وجود دارد.

چه پیش‌آمدهایی، امکان رُخداد برابر دارند؟ مفهوم «امکان رُخداد برابر» یا «احتمال پیش‌آمدها» یک مفهوم مقدماتی است و نمی‌توان آن را تعریف کرد. در این باره، ریاضیات پاسخی ندارد. ساختمان فیزیکی مکعب و یکسان بودن نحوهٔ پرتاب آن، این امکان را به ما می‌دهد که، رو شدن هر وجه آن را، برای همهٔ وجه‌ها، با امکانی برابر در نظر بگیریم.

وقتی مکعب‌بازی را به هوا پرتاب می‌کنیم، اطمینان داریم، بعد از نشستن روی زمین، روی وجه بالای آن، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ ظاهر می‌شود. مجموعهٔ این عددها، یعنی مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را، ضمن انداختن مکعب، **فضای نمونه‌ای آزمایش** و هریک از حالت‌هایی را، که در بین حالت‌های ممکن می‌تواند رُخ دهد، **پیش‌آمد تصادفی** (یا یک نقطه از فضای نمونه‌ای آزمایش) گویند. گاهی پیش آمد تصادفی، خود یک مجموعه است، مثلاً وقتی که بخواهیم، ضمن پرتاب مکعب، عددی رو شود که بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در این‌جا، پیش‌آمد تصادفی، مجموعه‌ای شامل دو عضو است: ۳ و ۶. پیش‌آمد تصادفی را با A و فضای نمونه‌ای آزمایش را با S نشان می‌دهند؛ در مثال ما

$$A = \{۳, ۶\},\ S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

اگر تعداد عضوهای مجموعهٔ A را $n(A)$ و تعداد عضوهای مجموعهٔ S را $n(S)$ بنامیم، بنا به تعریف، نسبت $\frac{n(A)}{n(S)}$ را **احتمال پیش‌آمد** A گویند و

یا $P(A)$ نشان می‌دهند:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

به طور کلی، اگر فرض کنیم از بین N حالت ممکن m حالت پاسخ‌گوی پیشامد تصادفی A است (یعنی در m حالت از N حالتِ ممکن، پیش‌آمد رخ دهد)، آن وقت

$$P(A) = \frac{m}{N}$$

در واقع، m *عبارت است از تعداد حالت‌های مساعد از بین* N *حالت ممکن* **و احتمال پیش‌آمد A، برابر است با نسبت تعداد پیش‌آمدهای مساعد به تعداد پیش‌آمدهای ممکن.**

احتمال این‌که با پرتاب مکعب بازی، عدد ۵ ظاهر شود، برابر است با $\frac{۱}{۶}$ و احتمال این‌که، با پرتاب مکعب بازی، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ ظاهر شود، برابر است با $\frac{۶}{۶}$ یعنی ۱، و این، **یک پیش‌آمد قطعی** (و نه پیش‌آمد تصادفی) است.

به این ترتیب: *احتمال، یعنی میزان توقع و انتظاری که برای رُخداد یک پیش‌آمد داریم و برابر است با نسبت تعداد پیش‌آمدهای مساعد، به تعداد پیش‌آمدهای ممکن.*

گاهی، احتمال رخداد یک پیش‌آمد را، به یاری آزمایش آماری پیدا می‌کنند. مثلاً، اگر کسی ضمن آزمایش تیراندازی، از ۱۰ شلیک، تنها ۴ تیر را به هدف بزنند، احتمال به هدف خوردن هر شلیک این فرد را، به تقریب برابر ۰/۴ به حساب می‌آورند. در چنین حالت‌هایی، بهتر است به‌جای واژهٔ «احتمال» از واژهٔ «**بسامد نسبی**» استفاده کنیم. در واقع، احتمال‌نسبتی مشخص و دقیق است، در حالی که بسامد نسبی، ممکن است در آزمایش‌های مختلف، حتا دربارهٔ یک پیش‌آمد، نوسان‌هایی داشته باشد. اگر آزمایش را،

برای فرد تیرانداز، با ۱۰ شلیک بعدی تکرار کنیم، نمی‌توان اطمینان داشت، به همان بسامد نسبی ۰/۴ برسیم.

حتا در سدهٔ هفدهم میلادی هم، به ضرورت بررسی این‌گونه پیش‌آمدها، که نمی‌توان از پیش برای رُخ دادن یا رُخ ندادن آن‌ها، پیش‌بینی قطعی کرد، پی برده بودند. برای این بررسی، دلیل‌های جدی وجود داشت: لازم بود ساختار جمعیت بررسی شود؛ لازم بود، عمر متوسط ساکنان، میزان ذخیرهٔ غذایی مورد نیاز ارتش و جمعیت معین شود و ...

مثال ۴. *در یک قرعه‌کشی ۱۰۰۰ نفر شرکت دارند که، از میان آن‌ها، ۱۵۰ نفر برنده می‌شوند. انتخاب برندگان با قرعه‌کشی و از بین این ۱۰۰۰ نفر است. احتمال بُرد هر نفر چقدر است؟*

حل. تعداد حالت‌های ممکن $N = ۱۰۰۰$ و تعداد حالت‌های مساعد $m = ۱۵۰$ است. بنابراین، طبق تعریف

$$P(A) = \frac{۱۵۰}{۱۰۰۰} = \frac{۳}{۲۰} = \%۱۵$$

مثال ۵. *در بین قطعه‌های یدکی، ۲۰۰ قطعهٔ درجه ۱، ۱۰۰ قطعهٔ درجه ۲ و ۵۰ قطعهٔ درجه ۳ وجود دارد. یکی از این قطعه‌ها را به تصادف برمی‌داریم. چه احتمالی وجود دارد که، این قطعه، درجه ۱ یا درجه ۲ یا درجه ۳ باشد؟*

حل: در این مثال $N = ۳۵۰$. پیش‌آمدهای تصادفی مربوط آمدن قطعه‌های درجه ۱، درجه ۲ و درجه ۳ را، به‌ترتیب، A، B و C می‌گیریم. در این صورت

$$P(A) = \frac{۲۰۰}{۳۵۰} = \frac{۴}{۷},\ P(B) = \frac{۱۰۰}{۳۵۰} = \frac{۲}{۷},$$
$$P(C) = \frac{۵۰}{۳۵۰} = \frac{۱}{۷}$$

*مثال ۶. *از بازهٔ* $[0, 1]$، *دو عدد به تصادف انتخاب کرده‌ایم. چه احتمالی وجود دارد که مجموع این دو عدد از* 1 *کمتر و حاصل‌ضرب آن‌ها از* $\frac{1}{3}$ *بیشتر باشد؟*

حل. اگر دو عددی را که به تصادف، از بازهٔ $[0, 1]$ انتخاب کرده‌ایم، x و y بنامیم، باید ببینیم، چه احتمالی وجود دارد تا داشته باشیم:

$$x + y < 1,\ xy > \frac{1}{3}$$

با این شرط که $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$.

حالت $x = 0$ یا $y = 0$ را کنار می‌گذاریم، زیرا در هریک از این دو حالت، حاصل‌ضرب xy برابر صفر می‌شود که از $\frac{1}{3}$ کمتر است. برای $x \neq 0$ و $y \neq 0$ داریم:

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > \frac{1}{3x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3x} < y < 1 - x \Rightarrow \frac{1}{3x} < 1 - x$$

باید با شرط $0 < x \leq 1$ ببینیم، چه احتمالی وجود دارد تا نابرابری اخیر برقرار باشد. به ترتیب داریم:

$$\frac{1}{3x} < 1 - x \Rightarrow 1 < 3x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 1 < 0$$

$3x^2 - 3x + 1$ را می‌توان به صورت $3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ نوشت، یعنی باید داشته باشیم:

$$3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} < 0$$

و این، ممکن نیست. مقدار سمت چپ نابرابری همیشه مثبت و کمترین مقدار آن برابر $\frac{۱}{۴}$ است (وقتی x برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد) و، بنابراین، به‌ازای هیچ مقداری از x، منفی نمی‌شود: نمی‌توان دو عدد x و y را از بازهٔ $[۰, ۱]$ طوری انتخاب کرد که مجموع آن‌ها کوچکتر از ۱ و حاصل‌ضربشان بزرگتر از $\frac{۱}{۳}$ باشد. اگر دو عدد «به تصادف» از این بازه انتخاب کنیم، احتمال این‌که مجموعی کمتر از ۱ و حاصل‌ضربی بیشتر $\frac{۱}{۳}$ داشته باشند، برابر صفر است، یعنی چنین احتمالی وجود ندارد.

۳. احتمال هندسی. پاره‌خط راست AB را روی پاره‌خط راست d در نظر می‌گیریم و نقطهٔ M را به تصادف، روی پاره‌خط راست d انتخاب می‌کنیم. بنا به تعریف:

احتمال این‌که نقطهٔ M روی پاره‌خط راست AB باشد، برابر است با نسبت طول پاره‌خط راست AB بر طول پاره‌خط راست d:

$$p = \frac{\text{طول پاره‌خط راست } AB}{\text{طول پاره‌خط راست } d}$$

به همین ترتیب، اگر شکل مسطح g را بخشی از شکل مسطح G فرض کنیم و نقطهٔ M را به تصادف روی شکل G در نظر بگیریم، احتمال این‌که نقطهٔ M روی شکل g قرار گیرد، برابر است با نسبت مساحت شکل g به مساحت شکل G.

سرانجام، احتمال قرار گرفتن نقطهٔ تصادفی M در جسم فضایی v، که بخشی از جسم فضایی V را تشکیل می‌دهد، برابر است با نسبت حجم جسم v به حجم جسم V.

توجه کنید: در تعریف رسمی احتمال (که به لاپلاس تعلق دارد)، نسبت $\frac{m}{N}$، یعنی نسبت پیش‌آمدهای مساعد به پیش‌آمدهای ممکن، عددی گویا



شکل ۷

است؛ در حالی که در احتمال هندسی، این نسبت ممکن است عددی گنگ باشد.

مثال ۷. *پاره‌خط راست OA را به طول ۱ روی محور Ox و نقطهٔ B را به تصادف روی آن انتخاب می‌کنیم. نقطهٔ B پاره‌خط راست OA را به دو بخش OB و BA تقسیم می‌کند. با چه احتمالی، کوچکترینِ این بخش‌ها، طولی کمتر از $\frac{۱}{۳}$ ندارد.*

حل. نقطه‌های M و N را، به‌ترتیب، به طول‌های $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ روی محور Ox انتخاب می‌کنیم (شکل ۷). نقطهٔ B باید روی پاره‌خط راست MN قرار گیرد تا طول‌های پاره‌خط‌های OB و BA، هیچ‌کدام، از $\frac{۱}{۳}$ کمتر نباشد. طول پاره‌خط MN برابر $\frac{۱}{۳}$ و طول پاره‌خط OA بر ۱ و بنابراین

$$p = \frac{\frac{۱}{۳}}{۱} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۸. *نقطه‌های $A(۰, ۰)$، $B(۴, ۰)$، $C(۱, \sqrt{۳})$ داده شده‌اند. نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم تا ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند. اگر نقطه‌ای را از درون مثلث ABC انتخاب کنیم، با چه احتمالی، این نقطه در درون مثلث ABD قرار می‌گیرد؟*

حل. اگر ضلع AB را قاعدهٔ مثلث بگیریم، عرض نقطهٔ C (یعنی $\sqrt{۳}$) با طول ارتفاع مثلث برابر می‌شود و بنابراین، مساحت مثلث ABC

برابر است با

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} \text{ (واحد مربع)}$$

ضریب زاویهٔ خط راست AC برابر است با $\sqrt{۳}$، یعنی ضلع AC با محور Ox (همان امتداد ضلع AB) زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. بنابراین AD (نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC)، با محور Ox، زاویهٔ ۳۰ درجه خواهد ساخت و معادلهٔ خط راستی که از A و D می‌گذرد، چنین می‌شود:

$$y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x \quad \text{(معادله نیمساز } AD\text{)}$$

باتوجه به مختصات نقطه‌های B و C می‌توان معادلهٔ خط راست BC را پیدا کرد:

$$y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{(معادلهٔ ضلع } BC\text{)}$$

اگر معادله‌های دو خط راست AD و BC را در یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی قرار دهیم، با حل دستگاه، مختصات نقطه D به‌دست می‌آید:

$$D\left(۲,\ \frac{۲}{۳}\sqrt{۳}\right)$$

اگر در مثلث ABD، ضلع AB را قاعده بگیریم، ارتفاع مثلث، بر عرض نقطه D منطبق و برابر $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ می‌شود. بنابراین، مساحت مثلث ABD برابر است با

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۲}{۳}\sqrt{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{(واحد مربع)}$$

درنتیجه، احتمال این‌که نقطه M (که به تصادف در درون مثلث ABC انتخاب شده است)، در درون مثلث ABD قرار گیرد، برابر است با

$$p = \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

تمرین‌ها

۴۴. مطلوب است محاسبهٔ مجموع $\sum_{n=۵}^{۱۰۰}[(n-۴)(n-۱)]$

۴۵. مطلوب است محاسبهٔ حاصل‌ضرب $\prod_{n=۱}^{۸۹} \cot n^\circ$

۴۶. معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۲x + ۵ = ۰$، ریشه‌های حقیقی ندارد، ولی مجموع و حاصل‌ضرب دو ریشهٔ آن، عددهایی حقیقی هستند:

$$\sum x_i = x_۱ + x_۲ = ۲;\ \Pi x_i = x_i x_۲ = ۵$$

مطلوب است محاسبهٔ ۱) $\sum x_i^۲$؛ ۲) $(\sum x_i)^۲$؛ ۳) $\sum x_i^۳$؛ ۴) $\sum \sqrt{x_i}$.

۴۷. معدل نمره‌های ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس، در پایان سال تحصیلی، چنین است (معادل‌ها را به ردیف صعودی، یعنی از کم به زیاد آورده‌ایم):

۸/۴; ۸/۷۵k; ۹/۱; ۱۰; ۱۰/۵; ۱۱/۲; ۱۱/۴; ۱۲/۳;
۱۲/۴۵; ۱۲/۷; ۱۲/۹۵; ۱۳/۰۵; ۱۳/۱۴; ۱۳/۷۲; ۱۳/۹۵; ۱۴/۰۲;
۱۴/۱۵; ۱۴/۳۲; ۱۴/۴; ۱۴/۷; ۱۴/۷۵; ۱۴/۸۲; ۱۴/۹۰; ۱۴/۹۲;
۱۴/۹۴; ۱۴/۹۵; ۱۵; ۱۵/۰۵; ۱۵/۰۸; ۱۵/۲; ۱۵/۵; ۱۵/۸;
۱۵/۹۱; ۱۶/۰۷; ۱۶/۴; ۱۶/۸; ۱۷/۲; ۱۷/۸; ۱۸/۵; ۱۹

۱) به چه صورتی جدول پراکندگی معدل‌ها را تنظیم می‌کنید؛ دسته یا رده‌ها را با چه فاصله در نظر می‌گیرید؟ میانگین معدل کلاس چند است؟

۲) برای جدولی که تنظیم کرده‌اید، نمودار دایره‌ای و نمودار ستونی را رسم کنید؛ در نمودار دایره‌ای، درصدها را مشخص کنید.

۳) انحراف معیار (واریانس) برای این معدل‌ها چند است؟

۴۸. حاصل عبارت $\sum_{n=۲}^{۱۳۷۵}\left(\frac{۱}{\log_n(۳۷۵!)}\right)$ را پیدا کنید. برای عدد درست و مثبت N، نماد $N!$ به معنای حاصل‌ضرب همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا N است و به آن، فاکتوریل N گویند:

$$N! = N(N-۱)(N-۲)\ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

مثلاً $۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

۴۹. این دو مجموع را محاسبه کنید:

$$۱)\ \sum_{k=۱}^{n}\left(x^k - \frac{۱}{x^k}\right)^۲ ;\quad ۲)\ \sum_{k=۱}^{n}\left(x^k + \frac{۱}{x^k}\right)^۲$$

۵۰. A و B و C در مسابقه‌ای شرکت کردند. احتمال برد A سه برابر احتمال برد B و احتمال برد C دو برابر احتمال برد B است. احتمال برد هرکدام چقدر است؟

۵۱. مکعب بازی را به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به زمین بنشیند. چه احتمالی وجود دارد که وجه بالای آن، عددی فرد باشد؟

***۵۲.** وقتی یک مکعب بازی را به هوا پرتاب کنیم، احتمال آمدن هریک از عددهای از ۱ تا ۶، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. اکنون می‌خواهیم ببینیم، ضمن انداختن دو مکعب بازی با هم، رو شدن چه مجموعی از عددهای دو مکعب احتمالی بیشتر و رو شدن چه مجموعی، احتمال کمتر دارد؟ جدول پراکندگی آماری

مجموع‌های ممکن عددهای دو مکعب را تنظیم و نمودار میله‌ای آن را رسم کنید.

۵۳. دو مکعب بازی را با هم به هوا پرتاب کردیم. چه احتمالی وجود دارد که، بعد از نشستن مکعب‌ها روی زمین، مجموع دو عدد آن‌ها برابر ۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴ باشد؟

۵۴. در دایره‌ای با شعاع برابر ۱، مربعی محاط کرده‌ایم. نقطه‌ای به تصادف از سطح دایره انتخاب می‌کنیم. چند درصد احتمال دارد، این نقطه در درون مربع محاطی نباشد؟ اگر دو نقطه از سطح دایره را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که، هر دو نقطه در بیرون مربع محاطی باشند، چنددرصد است؟

۵۵. حرف‌های «چ»، «ی»، «س»، «ت» و «ا» را روی پنج تکه کاغذ یکسان می‌نویسیم، کاغذها را تا می‌کنیم و در ظرفی می‌ریزیم. آن را به هم می‌زنیم و، سپس، یکی یکی برمی‌داریم، باز می‌کنیم و از راست به چپ، پهلوی هم می‌گذاریم. آیا ممکن است واژهٔ «چیستا» به‌دست آید؟ اگر واژهٔ «چیستا» درست شد، چقدر باید تعجب کرد؟

۵۶. سه خط راست $x + y = a$، $\sqrt{3}x - y = b$ و $y = c$ مفروض‌اند a، b و a عددهای حقیقی دلخواهی هستند. احتمال این‌که، از برخورد این سه خط راست، مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌دست آید، چقدر است؟

۵۷. ضمن جابه‌جا کردن جعبه‌ای که شامل ۲۱ قطعه سالم و ۱۰ قطعهٔ ناقص است، یکی از قطعه‌ها گم شد. یک قطعه را به تصادف برمی‌داریم. بعد از آزمایش، معلوم می‌شود، این قطعه، سالم است. چه احتمالی وجود دارد که، قطعهٔ گم شده سالم باشد؟ با چه احتمالی قطعهٔ گم شده ناقص است؟

۵۸. صفحه‌ای را با خط‌های راست موازی پر کرده‌ایم، به نحوی که

فاصلهٔ هر دو خط راست مجاور برابر ۳ سانتی‌متر باشد. سکه‌ای با شعاع برابر ۱ سانتی‌متر را پرتاب کرده‌ایم تا روی صفحه بیفتد. با چه احتمالی، سکه خط‌های راست موازی را قطع نمی‌کند؟

۵۹. در یک جعبه ۱۰ گلوله وجود دارد که ۳تای آن قرمز و بقیه سفیدند. ۲ گلوله به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که هر دو گلوله سفید باشند چقدر است؟ چه احتمالی وجود دارد که هر دو گلوله قرمز باشند؟

***۶۰.** کامیونی با سرعت ثابت a کیلومتر در ساعت $(a < ۱۰۰)$ در جاده حرکت می‌کند. دو اتومبیل سواری A و B، به یک فاصله از کامیون قرار دارند. A با سرعتی بیشتر از a کامیون را تعقیب می‌کند و B به استقبال کامیون می‌آید. احتمال این‌که A زودتر از B به کامیون برسد، چقدر است؟ به شرطی که بدانیم، سرعت A از ۱۰۰ کیلومتر در ساعت و سرعت B از ۱۲۰ کیلومتر در ساعت تجاوز نمی‌کند و هر دو اتومبیل با سرعت‌های تصادفی ثابتی حرکت می‌کنند.

***۶۱.** احتمال کدام‌یک بیشتر است: وقتی چهار مکعب بازی را با هم بیندازیم و، دست‌کم یکی از آن‌ها، عدد ۱ را نشان دهد، یا وقتی دو مکعب بازی را ۲۴ بار با هم بیندازیم و، دست‌کم یک بار، دو عدد ۱، بین چهار مکعب ظاهر شود؟

این مساله، به *معمای شوالیه ده‌مره* معروف است. این اصیل‌زادهٔ فرانسوی، دو احتمال را برابر می‌دانست و این‌طور استدلال می‌کرد: احتمال آمدن ۱، ضمن انداختن یک مکعب، برابر $\frac{۱}{۶}$ و، بنابراین، ضمن انداختن ۴ مکعب، برابر $\frac{۱}{۶} \times ۴$ یعنی $\frac{۲}{۳}$ است. وقتی دو مکعب بازی را با هم بیندازیم، به دلیل وجود ۳۶ حالت مختلف، احتمال این‌که دست‌کم برای دو مکعب عدد ۱ بیابید، برابر $\frac{۱}{۳۶}$ و، بنابراین، برای ۲۴ بار تکرار این عمل، برابر $\frac{۱}{۳۶} \times ۲۴$، یعنی $\frac{۲}{۳}$ می‌شود. آیا استدلال و نتیجه‌گیری شوالیه ده‌مره درست است؟

۲. نابرابری کوشی ـ نامعادله ـ تعیین علامت چندجمله‌ای‌های جبری

این بخش، در واقع، دنبالهٔ بخش ۵ از جلد دوم ریاضیات محاسبه‌ای و تکمیل آن است. بنابراین، بهتر است برای یادآوری، پیش از آن‌که این بخش را آغاز کنید، بخش ۵ از جلد دوم ریاضیات محاسبه‌ای و تمرین‌های آن را مرور کنید.

§۱. یک نابرابری اتحادی مهم. نابرابری میانگین‌ها یا نابرابری کوشی

۱. میانگین حسابی و میانگین هندسی n عدد مثبت. می‌دانیم، منظور از میانگین حسابی n عدد مثبت، $\frac{۱}{n}$ مجموع آن‌ها است. اگر میانگین حسابی n عدد مثبت $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n را S بنامیم، آن‌وقت

$$S = \frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + \ldots + a_n}{n}$$

مثلاً، میانگین حسابی دو عدد ۵ و ۱۷، برابر است با $\frac{۵ + ۱۷}{۲}$، یعنی ۱۱؛ همچنین میانگین حسابی سه عدد ۲ و ۱۲ و ۱۶، برابر است با

$\frac{۲ + ۱۲ + ۱۶}{۳}$، یعنی ۱۰.

میانگین حسابی، به طور کلی، برای عددهای حقیقی معنا دارد. میانگین حسابی سه عدد $۴ - ۵\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۳} + ۳$ و $۳\sqrt{۳} + ۲$ چنین است:

$$\frac{(۴ - ۵\sqrt{۳}) + (۲\sqrt{۳} + ۳) + (۳\sqrt{۲} + ۲)}{۳} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

میانگین هندسی n عدد مثبت، برابر است با ریشهٔ nام حاصل‌ضرب آن‌ها: اگر میانگین هندسی n عدد مثبت $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n را P بنامیم، آن‌وقت

$$P = \sqrt[n]{a_۱ a_۲ a_۳ \ldots a_n}$$

مثلاً، میانگین هندسی دو عدد ۳ و ۱۲، برابر است با $\sqrt{۳ \times ۱۲}$، یعنی ۶؛ به همین ترتیب، برای میانگین هندسی سه عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۱۵}$ و $\frac{۵}{۹}$ داریم:

$$P = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۱۵} \times \frac{۵}{۹}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲۷}} = \frac{۱}{۳}$$

در میانگین هندسی، به دلیل این‌که با ریشگی سروکار داریم و برای این‌که با عددهای غیرحقیقی روبه‌رونشویم، تا زمانی که قانون‌های مربوط به عمل با عددهای موهومی را یاد نگرفته‌ایم، تنها از عددهای مثبت استفاده می‌کنیم. البته در حالتی هم که تعداد عددهای منفی، زوج باشد، یا میانگین هندسی تعداد فردی از عددها را لازم داشته باشیم، به مشکلی برنمی‌خوریم. میانگین هندسی سه عدد -۲، ۶ و ۱۸ چنین است؟

$$P = \sqrt[۳]{-۲ \times ۶ \times ۱۸} = \sqrt[۳]{-۲۱۶} = -۶$$

و میانگین هندسی دو عدد -۲ و -۸ برابر ۴ است.

در اینجا و در بحث مربوط به نابرابری‌ها، همه‌جا با مقدارهای مثبت سروکار داریم، مگر آنکه برخلاف آن، تاکید شده باشد.

۲. نابرابری میانگین‌های حسابی و هندسی. ثابت می‌کنند، برای n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n، میانگین حسابی از میانگین هندسی کوچکتر نیست، یعنی همیشه داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

و علامت برابری تنها وقتی برقرار است که هر n عدد با هم برابر باشند، یعنی:

اگر $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$، آن وقت $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (چرا؟).

در این کتاب، به اثبات نابرابری میانگین‌های حسابی و هندسی (که نابرابری کُوشی هم نامیده می‌شود)، در حالت کلی، نمی‌پردازیم و برای فرصت دیگری می‌گذاریم. ولی حالت‌های خاص نابرابری کوشی را، وقتی که n (یعنی تعداد عددها) برابر ۲، ۳ و ۴ باشد، ثابت می‌کنیم (در تمرین‌های پایان این بخش ـ تمرین ۶۸ـ نابرابری کوشی را برای حالت‌های ۵ $= n$ و ۶ $= n$ هم، ثابت کرده‌ایم). ضمن حل مساله‌های جبر (و نه‌تنها جبر)، بارها و بارها، ناچار می‌شوید از نابرابری کوشی استفاده کنید.

الف) ۲ $= n$، پیش از این هم با نابرابری کوشی برای حالت ۲ $= n$ برخورد کرده‌ایم. باید ثابت کنیم، برای دو عدد مثبت a و b، همیشه داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نابرابری، به‌سادگی به صورت $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ و، سپس، به صورت $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ درمی‌آید که، درستی آن، روشن است. درضمن روشن

است که، برای $a = b$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+b}{۲} = \sqrt{ab}$$

به عنوان کاربرد نابرابری کوشی (در حالت $n = ۲$)، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱. *این معادله را حل کنید:*

$$\frac{۱}{x^۲+x+۱} + \frac{۱}{x^۲-۲x+۳} = \frac{۲}{\sqrt{(x^۲+x+۱)(x^۲-۲x+۳)}} \quad (۱)$$

حل. در آغاز روشن می‌کنیم، هرکدام از عبارت‌های مخرج کسرها، در سمت چپ برابری، به‌ازای هر مقدار حقیقی x، مقداری مثبت‌اند. در واقع

$$x^۲+x+۱ = \left(x^۲+x+\frac{۱}{۴}\right) - \frac{۱}{۴} + ۱ = \left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۳}{۴};$$

$$x^۲-۲x+۳ = (x^۲-۲x+۱) + ۲ = (x-۱)^۲ + ۲$$

که مثبت بودن آن‌ها روشن است. اگر در سمت چپ برابری (۱)، کسر اول را a و کسر دوم را b بنامیم، معادله به این صورت درمی‌آید:

$$a+b = ۲\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{۲} = \sqrt{ab}$$

ولی می‌دانیم، این برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a = b \Rightarrow x^۲+x+۱ = x^۲-۲x+۳ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

معادلهٔ (۱)، تنها یک ریشه دارد: $x = \frac{۲}{۳}$. اندکی بیندیشید. اگر می‌خواستید معادله را با روش‌های عادی حل کنید، چگونه سرگردان می‌شدید؟

مثال ۲. *ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد مثبت، مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که، این دو عدد، با هم برابر باشند.*

حل. این مساله راه‌حل‌های مختلف دارد، ولی ساده‌ترینِ آن‌ها، استفاده از نابرابری کوشی است. دو عدد را x و y و مجموع ثابت آن‌ها را a می‌نامیم:

$$x + y = a$$

می‌خواهیم ببینیم، به‌ازای چه مقدارهایی از x و y، حاصل‌ضرب xy به بیشترین مقدار خود می‌رسد. بنابر نابرابری کوشی داریم:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{۲} = \frac{a}{۲} \Rightarrow xy \leq \frac{۱}{۴}a^۲$$

حاصل‌ضرب دو عدد مثبت x و y، همیشه از $\frac{a^۲}{۴}$ کوچکتر است و تنها در حالت $x = y$ برابر $\frac{a^۲}{۴}$ می‌شود. بیشترین مقدار حاصل‌ضرب دو عدد مثبت x و y برابر $\frac{a^۲}{۴}$ و وقتی به‌دست می‌آید که دو عدد با هم برابر باشند.

یادداشت. «هوراتیوس»، نویسندهٔ رومی که بین سال‌های ۶۵ تا ۸ پیش از میلاد زندگی می‌کرد، در جایی، هم‌عصران خود را، به این دلیل که می‌پنداشتند، اگر دو شکل مسطح، محیطی برابر داشته باشند، مساحت‌هایی برابر دارند، به سختی سرزنش کرده است. نوشتهٔ «هوراتیوس» نشان می‌دهد که، بسیاری از قوم‌های باستانی، باید به همین پندار نادرست معتقد بوده باشند. زمینی مستطیلی شکل با محیط برابر ۱۶۰ متر در نظر بگیرید. طول و عرض این مستطیل چگونه باشد تا مساحت مستطیل به بیشترین مقدار خود برسد؟ مجموع طول و عرض مستطیل برابر ۸۰ و مقداری ثابت است. بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها (یعنی مساحت زمین) ـبنابر مثال ۲ـ وقتی به حداکثر خود

می‌رسد که طول و عرض آن، با هم برابر باشند که، در این صورت، مساحت زمین برابر

$$۴۰ \times ۴۰ = ۱۶۰۰ \text{ (متر مربع)}$$

می‌شود. هرچه اختلاف طول و عرض بیشتر باشد، با مساحتی کمتر روبه‌رو می‌شویم:

$$۴۱ \times ۳۹ = ۱۵۹۹ \text{ (متر مربع)}$$

$$۴۲ \times ۳۸ = ۱۵۹۶ \text{ (متر مربع)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$۷۸ \times ۲ = ۱۵۶ \text{ (متر مربع)}$$

$$۷۹ \times ۱ = ۷۹ \text{ (متر مربع)}$$

به طور کلی، هرچه شکل به سوی منظم‌تر بودن برود، مساحتی بیشتر خواهد داشت. افلاطون، فیلسوف ذهن‌گرای یونانی، برای نخستین بار، این قضیهٔ درست را (البته، بدون اثبات) طرح کرد که، در بین همهٔ شکل‌های روی صفحه که محیطی برابر دارند، مساحت دایره از همه بیشتر است. به عنوان نمونه، اگر زمین با محیط برابر ۱۶۰ متر را، به شکل دایره انتخاب کنیم، مساحتی بیش از ۲۰۰۰ متر مربع پیدا می‌کند (خودتان محاسبه کنید). و این بیشترین مقدار ممکن، برای مساحت شکلی از صفحه است که محیطی برابر ۱۶۰ متر داشته باشد.

مثال ۳. ثابت کنید نابرابری $\frac{x^۲ + ۱۲}{\sqrt{x^۲ + ۳}} \geq ۶$، برای $x \in \mathbf{R}$، همیشه برقرار است.

حل. کسر $\frac{x^۲+۱۲}{\sqrt{x^۲+۳}}$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{x^۲+۱۲}{\sqrt{x^۲+۳}} = \frac{x^۲+۳}{\sqrt{x^۲+۳}} + \frac{۹}{\sqrt{x^۲+۳}} = \sqrt{x^۲+۳} + \frac{۹}{\sqrt{x^۲+۳}}$$

که اگر از نابرابری کوشی برای دو مقدار مثبت $\sqrt{x^۲+۳}$ و $\frac{۹}{\sqrt{x^۲+۳}}$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x^۲+۳}+\frac{۹}{\sqrt{x^۲+۳}} \geq ۲\sqrt{\sqrt{x^۲+۳}\times\frac{۹}{\sqrt{x^۲+۳}}} = ۲\times۳ = ۶$$

یعنی $\frac{x^۲+۱۲}{\sqrt{x^۲+۳}} \geq ۶$.

ب) $n = ۳$. باید ثابت کنیم، برای سه عدد مثبت a، b و c، همیشه داریم:

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم: $\sqrt[۳]{a} = x$، $\sqrt[۳]{b} = y$ و $\sqrt[۳]{c} = z$. نابرابری کوشی، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{۳} \geq xyz \Rightarrow x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz \geq ۰$$

عبارت سمت چپ نابرابری اخیر قابل تجزیه است (تمرین ۱ از مثال ۲ صفحه ۱۷۳ و، همچنین صفحهٔ ۱۸۷ را در جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید):

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz =$$
$$= (x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz) =$$

$$= \frac{۱}{۲}(x + y + z)(۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ - ۲xy - ۲xz - ۲yz) =$$

$$= \frac{۱}{۲}(x + y + z)[(x - y)^۲ + (x - z)^۲ + (y - z)^۲]$$

و عبارت اخیر به‌ازای همهٔ مقدارهای مثبت x، y و z غیرمنفی است (به‌ازای $x = y = z$، برابر صفر می‌شود). پس

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz \geq ۰ \Rightarrow \frac{a + b + c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

علامت برابری برای حالت $a = b = c$ است.

مثال ۴. ثابت کنید، برای عددهای حقیقی و مثبت a، b و c، همیشه داریم:

$$\left(\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b}\right)\left(\frac{c}{a + b} + \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a}\right) \geq ۹$$

حل. باتوجه به نابرابری کوشی برای سه مقدار مثبت داریم:

$$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{a + b}{c} \cdot \frac{b + c}{a} \cdot \frac{c + a}{b}};$$

$$\frac{c}{a + b} + \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{c}{a + b} \cdot \frac{a}{b + c} \cdot \frac{b}{c + a}}$$

که از ضرب آن‌ها در یکدیگر، به همان نابرابری مساله می‌رسیم. علامت برابری وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{b + c}{a} = \frac{c + a}{b}$$

از برابری دو کسر اول به‌دست می‌آید:

$$a^۲ + ab = bc + c^۲ \Rightarrow (a - c)(a + c) = -b(a - c)$$

و یا سرانجام $(a-c)(a+b+c)=0$. چون $a+b+c$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، پس $a=c$. به همین ترتیب، از برابری دو کسر آخر به‌دست می‌آید $a=b$. بنابراین، برای $a=b=c$ داریم:

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)=9$$

مثال ۵. *ثابت کنید، اگر سه مقدار متغیر مثبت، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که، این سه مقدار، با هم برابر باشند.*

حل. در این‌جا هم، مثل حالت دو مقدار متغیر مثبت (مثال ۲)، نابرابری کوشی ما را به نتیجه می‌رساند. سه مقدار متغیر را x و y و z و مجموع ثابت آن‌ها را a می‌گیریم. بنا به نابرابری کوشی داریم:

$$\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}=\frac{a}{3}\Rightarrow xyz\leq\frac{a^3}{27}\quad(*)$$

می‌دانیم، علامت برابری، در حالت $x=y=z$ پیش می‌آید. نابرابری $(*)$ نشان می‌دهد: حاصل‌ضرب x و y و z، همیشه از $\frac{a^3}{27}$ کمتر است و تنها در حالت $x=y=z$، برابر $\frac{a^3}{27}$، یعنی بیشترین مقدار ممکن خود می‌شود.

ج) $n=4$. باید برای مقدارهای مثبت a، b، c و d، ثابت کنیم:

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$$

سمت چپ نابرابری را، باتوجه به نابرابری کوشی دربارهٔ $n=2$، تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[۴]{abcd}$$

مثال ۶. *ثابت کنید، برای هر $۱ < x$، همیشه داریم:*

$$\frac{x(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})+۵\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x^۲-۱}} \geq ۴\sqrt{۲}$$

حل. سمت چپ نابرابری را تبدیل و از نابرابری کوشی در حالت $n = ۴$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})+۵\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x^۲-۱}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x-۱}} + \frac{x}{\sqrt{x+۱}} + \frac{۵}{\sqrt{x+۱}} =$$

$$= \frac{(x-۱)+۱}{\sqrt{x-۱}} + \frac{(x+۱)-۱}{\sqrt{x+۱}} + \frac{۵}{\sqrt{x+۱}} =$$

$$= \sqrt{x-۱} + \frac{۱}{\sqrt{x-۱}} + \sqrt{x+۱} + \frac{۴}{\sqrt{x+۱}} \geq$$

$$\geq ۴\sqrt[۴]{\sqrt{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}\times\sqrt{x+۱}\times\frac{۴}{\sqrt{x+۱}}} = ۴\sqrt[۴]{۴} = ۴\sqrt{۲}$$

مثال ۷. *ثابت کنید، اگر مجموع چهار متغیر مثبت، مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که، این متغیرها با هم برابر باشند.*

راه‌حل شبیه حالت‌های دو و سه متغیر است. به طور کلی، این قضیه در ریاضیات ثابت می‌شود:

قضیه. *اگر n متغیر مثبت، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی بیشترین مقدار را دارد که، این متغیرها، با هم برابر باشند.*

§۲. علامت عبارت‌های $ax + b$ و $ax^2 + bx + c$، به‌ازای مقدارهای حقیقی x

۱. **علامت عبارت $ax + b$.** عبارت $ax + b$ را y می‌نامیم:

$$y = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

روشن است: اگر $x < -\frac{b}{a}$ و آن‌وقت $x + \frac{b}{a} < 0$؛

اگر $x > -\frac{b}{a}$، آن‌وقت $x + \frac{b}{a} > 0$؛

و اگر $x = -\frac{b}{a}$، آن‌وقت $x + \frac{b}{a} = 0$.

علامت y (وقتی $x \neq -\frac{b}{a}$)، به‌جز $x + \frac{b}{a}$، به علامت a (یعنی ضریب x) هم بستگی دارد. باتوجه به آن‌چه گفتیم، می‌توان، برای علامت $y = ax + b$، باتوجه به این‌که $x = -\frac{b}{a}$ ریشهٔ دوجمله‌ای $ax + b$ است، این‌طور نتیجه گرفت:

۱) وقتی به‌جای x، عددی کوچکتر از ریشه قرار دهیم، حاصل $ax + b$، علامتی مخالف علامت ضریب x (یعنی a) پیدا می‌کند؛

۲) وقتی به‌جای x، عددی بزرگتر از ریشه قرار دهیم، حاصل $ax + b$، علامتی موافق علامت ضریب x (a) پیدا می‌کند؛

۳) وقتی به‌جای x، عددی برابر ریشه قرار دهیم، حاصل $ax + b$ برابر صفر می‌شود.

این نتیجه‌گیری را می‌توان به‌صورت یک جدول بیان کرد:

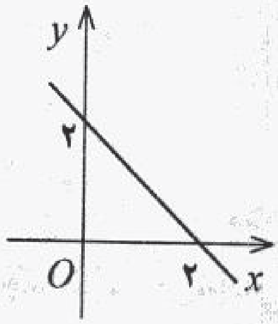
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$y = ax + b$		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

توجه کنید: در جدول، در سطر برابر x، در آغاز $-\infty$ و در پایان $+\infty$ گذاشته‌ایم. این نمادها، مشخص می‌کنند که، مقدارهای x را، صعودی، یعنی از کم به زیاد در نظر گرفته‌ایم: در سمت چپ $-\frac{b}{a}$، عددهای کوچکتر از آن و در سمت راست $-\frac{b}{a}$، عددهای بزرگتر از آن قرار دارند.

مثال ۸. *علامت عبارت $y = -x + ۲$ را، هم در یک جدول و هم روی نمودار نشان دهید.*

حل. در شکل ۸ جدول علامت‌ها و نمودار خط راست $y = -x + ۲$ داده شده است.

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$-x + ۲$	$+$	۰	$-$



شکل ۸: *جدول علامت‌ها و نمودار* $y = -x + ۲$

خط راست $y = -x + ۲$، در نقطه $x = ۲$ محور $x'x$ را قطع می‌کند، یعنی به‌ازای $x = ۲$ داریم $y = -x + ۲ = ۰$. همچنین، روی نمودار دیده می‌شود که، برای $x < ۲$، مقدار y مثبت و برای $x > ۲$، مقدار y منفی است.

مثال ۹. کسر $y = \frac{۲}{۳x + ۵}$، به‌ازای مقدارهای مختلف x، چه علامتی دارد؟

حل. چون صورت کسر عددی مثبت است، علامت مقدار کسر، همان علامت مقدار مخرج کسر است. بنابراین، مثل این است که علامت عبارت $۳x + ۵$ را تعیین می‌کنیم. البته، در این‌جا باید دقت کرد که کسر به‌ازای $x = -\frac{۵}{۳}$ (عددی که مخرج را صفر می‌کند) معنا ندارد. جدول علامت کسر

y، به‌ازای مقدارهای مختلف x، چنین است:

x	$-\infty$	$-\frac{۵}{۳}$	$+\infty$
$y = \frac{۲}{۳x + ۵}$	$-$	|	$+$

در جدول، زیر عدد $-\frac{۵}{۳}$، یک خط کوتاه کشیده‌ایم تا بخش مقدارهای منفی y را از بخش مقدار مثبت آن جدا کند و، درضمن، نشان دهد، کسر y، به‌ازای $x = -\frac{۵}{۳}$ بی‌معنی است.

مثال ۱۰. کسر $y = \frac{۱ - x^{۲}}{x^{۲} - ۴}$ *را، به‌ازای مقدارهای مختلف x، تعیین علامت کنید.*

حل. در آغاز کسر را طوری تبدیل می‌کنیم که، در صورت و مخرج آن، با ضرب عبارت‌هایی درجه اول سروکار داشته باشیم:

$$y = \frac{(۱ - x)(۱ + x)}{(x - ۲)(x + ۲)}$$

کسر به‌ازای $x = -۱$ و $x = ۱$ برابر صفر می‌شود و به‌ازای $x = -۲$ و $x = ۲$ بی‌معنی است. می‌دانیم، وقتی تنها با ضرب یا تقسیم دربارهٔ چند عدد سروکار داشته باشیم، اگر تعداد عددهای منفی زوج باشد، حاصل مثبت و اگر تعداد عددهای منفی فرد باشد، حاصل منفی می‌شود. جدولی رسم می‌کنیم، عددهای -۲، -۱، ۱ و ۲ (ریشه‌های صورت و ریشه‌های مخرج) را، در سطری که مقدارهای x را می‌دهد، به‌ترتیب صعودی (یعنی از کم به زیاد) می‌نویسیم، سپس، در چهار سطر پشت سر هم، علامت هریک از عبارت‌های $۱ - x$، $۱ + x$، $x - ۲$ و $x + ۲$ را به‌طور جداگانه پیدا

می‌کنیم. حاصل‌ضرب این علامت‌ها، علامت کسر y را به ما می‌دهد:

x	$-\infty$		-۲		-۱		۱		۲		$+\infty$
$۱ - x$		+		+		+	۰	−		−	
$۱ + x$		−		−	۰	+		+		+	
$x - ۲$		−		−		−		−	۰	+	
$x + ۲$		−	۰	+		+		+		+	
$y = \dfrac{۱ - x^۲}{x^۲ - ۴}$		−		+		−		+		−	

مقدار کسر y به‌ازای مقدارهای $x < -۲$ و $-۱ < x < ۱$ و $x > ۲$ منفی، به‌ازای مقدارهای $-۲ < x < -۱$ و $۱ < x < ۲$ مثبت، به‌ازای $x = -۱$ و $x = ۱$ صفر و به‌ازای $x = -۲$ و $x = ۲$ بی‌معنی است.

۲. علامت عبارت $ax^۲ + bx + c$. پیش از این دیده‌ایم که می‌توان سه‌جمله‌ای درجه دوم را، به این صورت تبدیل کرد:

$$f(x) = ax^۲ + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲}\right] \quad (۱)$$

علامت سه‌جمله‌ای را، به‌ازای مقدارهای مختلف x، در سه حالت دنبال می‌کنیم:

۱) $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$. در این حالت $۴ac - b^۲ > ۰$ و مقدار داخل کروشه، به‌ازای هر مقدار حقیقی x مثبت است. بنابراین، علامت سه‌جمله‌ای $f(x)$، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ همان علامت a است.

۲) $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰$. در این حالت، $f(x)$ به‌صورت

$$f(x) = ax^۲ + bx + c = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲$$

درمی‌آید که، باز هم، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، به‌جز $x = -\frac{b}{2a}$، همان علامت a را پیدا می‌کند؛ به‌ازای $x = -\frac{b}{2a}$، سه‌جمله‌ای برابر صفر می‌شود: $-\frac{b}{2a}$، ریشهٔ مضاعف معادله است.

۳) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. در این حالت، مقدار داخل کروشه تجزیه می‌شود و به‌دست می‌آید:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

و یا به‌صورت ساده‌تر، اگر دو ریشهٔ معادله را x_1 و x_2 بنامیم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (2)$$

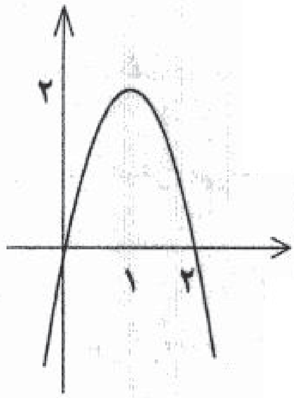
از برابری (۲) روشن است که، اگر به‌جای x عددی قرار دهیم که از هر دو ریشهٔ x_1 و x_2 بزرگتر یا از هر دو ریشهٔ x_1 و x_2 کوچکتر باشد، حاصل‌ضرب $(x - x_2)$ $(x - x_1)$ مثبت و، باز هم، سه‌جمله‌ای $f(x)$ همان علامتی را پیدا می‌کنید که a دارد. ولی اگر به‌جای x عددی بگذاریم که بین دو ریشه، یعنی از یکی بزرگتر و از دیگری کوچکتر باشد، آن‌وقت حاصل‌ضرب $x - x_1$ در $x - x_2$، عددی منفی و علامت سه‌جمله‌ای، مخالف علامت a می‌شود.

از این بحث، به این نتیجه می‌رسیم که:

علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$، به‌ازای هر مقدار حقیقی x، همیشه همان علامت a است، مگر وقتی که این سه‌جمله‌ای دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد و عددی که به‌جای x می‌گذاریم، بین دو ریشه واقع باشد.

روشن است که به‌ازای ریشهٔ معادله، حاصل سه‌جمله‌ای برابر صفر می‌شود.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$y = -۲x^۲ + ۴x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	



شکل ۹ :

جدول و نمودار $y = -۲x^۲ + ۴x$، برای تعیین علامت آن.

مثال ۱۱. *حاصل عددی عبارت $y = -۲x^۲ + ۴x$ را، به‌ازای مقدارهای مختلف x، هم به یاری جدول و هم به یاری نمودار معین کنید.*

حل. عبارت درجه دوم $-۲x^۲ + ۴x$، دو ریشهٔ حقیقی دارد: ۰ و ۲. یعنی مقدار y به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۲$ برابر صفر است. اگر به‌جای x عددی کوچکتر از ۰ یا بزرگتر از ۲ قرار دهیم (مقدار x در بیرون ریشه‌ها باشد)، علامت y، منفی (موافق علامت $a = -۲$) و اگر به‌جای x، عددی بین ۰ و ۲ قرار دهیم (x بین دو ریشه باشد) علامت y، مثبت (مخالف علامت a) می‌شود. این وضع، در شکل ۹، هم با جدول و هم با نمودار نشان داده شده است.

مثال ۱۲. *این نامعادله را حل کنید:*

$$\frac{۱}{x+۲} + \frac{۱}{x-۱} \geq \frac{۱}{x-۲} \qquad (۱)$$

حل. جز در حالت نامعادله‌های سادهٔ درجه اول، منطقی‌ترین راه برای پیدا کردن مجموعهٔ جواب در نامعادله‌ها این است که همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ نامعادله منتقل کنیم. در این صورت، حل نامعادله منجر به پیدا کردن

علامت یک عبارت می‌شود. برای نامعادلهٔ (۱)، به‌ترتیب داریم:

$$\frac{۱}{x+۲}+\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}\geq ۰;$$
$$\frac{(x-۱)(x-۲)+(x+۲)(x-۲)-(x+۲)(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x-۲)}\geq ۰;$$
$$\frac{x^۲-۴x}{(x+۲)(x^۲-۳x+۲)}\geq ۰$$

روشن است که $x \neq ۲$، $x \neq ۱$ و $x \neq -۲$ (مخرج کسر نمی‌تواند برابر صفر شود). صورت و مخرج کسر، شامل عبارت‌های درجه اول و درجه دوم است که می‌توانیم علامت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنیم. در یک جدول، علامت هر عبارت و، سپس، علامت کسر را معین می‌کنیم. در سطر مقدارهای x، ریشه‌های عبارت‌های صورت و مخرج را، به‌ترتیب صعودی نوشته‌ایم.

x	$-\infty$ -۲	۰	۱	۲	۴	$+\infty$
$x^۲-۴x$	+	+	−	−	−	+
$x+۲$	−	+	+	+	+	+
$x^۲-۳x+۲$	+	+	+	−	+	+
$\frac{x^۲-۴x}{(x+۲)(x^۲-۳x+۲)}$	−	+	−	+	−	+

جدول نشان می‌دهد که، مقدار کسر، در کجاها مثبت یا صفر است:

$$-۲<x\leq ۰,\ ۱<x<۲,\ x\geq ۴$$

مثال ۱۳. ثابت کنید، به‌ازای مقدارهای حقیقی a و b و x، عبارت درجه دوم

$$x^۲-(a+b)x+a^۲+b^۲-ab$$

نمی‌تواند منفی شود. در چه حالتی، این عبارت برابر صفر می‌شود؟

حل. مبین عبارت درجه دوم مفروض را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = (a+b)^۲ - ۴(a^۲ + b^۲ - ab) = -۳(a-b)^۲$$

مبین، به‌ازای $a = b$ برابر صفر و برای $a \neq b$ منفی است. در حالت $a = b$، عبارت درجه دوم، ریشهٔ مضاعفی برابر $x = a$ دارد، یعنی به‌ازای این مقدار x برابر صفر و به‌ازای سایر مقدارهای x، مقداری مثبت می‌شود (در حالت $\Delta = ۰$، علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم، همان علامت ضریب $x^۲$ است) و در حالت $a \neq b$، عبارت درجه دوم به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ مقداری مثبت می‌شود (در حالت $\Delta < ۰$، علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم، به‌ازای هر مقدار حقیقی مجهول، همان علامت ضریب $x^۲$ است). به این ترتیب، عبارت درجه دوم مفروض، به‌ازای $x = a = b$ برابر صفر و به‌ازای سایر مقدارهای x، مقداری مثبت است و هرگز نمی‌تواند برابر مقداری منفی شود.

۳§. معیارهای حقیقی بودن ریشه‌های یک عبارت درجه دوم

عبارت درجه دوم را در حالت کلی در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = ax^۲ + bx + c$$

$f(x)$ با چه معیاری، ریشه‌های حقیقی دارد؟ برخی از این معیارها را در این‌جا می‌آوریم.

۱) ساده‌ترین شرط، برای حقیقی بودن ریشه‌ها، منفی نبودن مبین سه‌جمله‌ای است: $\Delta = b^۲ - ۴ac \geq ۰$.

این شرط، برای حقیقی بودن ریشه‌ها، **لازم و کافی** است؛ یعنی برای این‌که ریشه‌های عبارت درجه دوم حقیقی باشند، منفی نبودن مبین لازم است؛ درضمن، برای حقیقی بودن ریشه‌ها، کافی است مبین منفی نباشد و به‌جز این شرط، به شرط دیگری نیاز نداریم.

$\Delta \geq 0$، شرط لازم و کافی، برای حقیقی بودن ریشه‌های یک عبارت درجه دوم است.

۲) $ac \leq 0$. روشن است، اگر حاصل‌ضرب a و c منفی باشد (یعنی a و c، علامت‌های متفاوتی داشته باشند)، و یا اگر c برابر صفر باشد (a مخالف صفر است، زیرا با صفر شدن a، عبارت درجه دوم نخواهیم داشت)، عبارت $b^2 - 4ac$، یعنی مبین سه‌جمله‌ای، مثبت می‌شود و، درنتیجه، ریشه‌های سه‌جمله‌ای عددهایی حقیقی خواهند بود.

شرط $ac \leq 0$، برای حقیقی بودن ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم **کافی است ولی لازم نیست.** یعنی کافی است a و c علامت‌های مختلف داشته باشند یا c برابر صفر باشد، تا مطمئن شویم، سه‌جمله‌ای درجه دوم، ریشه‌های حقیقی دارد، ولی اگر $ac > 0$ (یعنی a و c هم‌علامت باشند)، ممکن است ریشه‌ها حقیقی باشند یا موهومی. اگر a و c هم‌علامت باشند، نمی‌توان در حقیقی بودن یا حقیقی نبودن ریشه‌ها داوری کرد.

چون شرط $ac \leq 0$، شرطی بیشتر از حد لزوم است، ویژگی دیگری را هم در سه‌جمله‌ای روشن می‌کند: اگر $ac = 0$، یکی از ریشه‌ها برابر صفر است (چرا؟)؛

و اگر $ac < 0$، آن‌وقت دو ریشهٔ حقیقی، علامت‌های متفاوتی دارند (زیرا $\frac{c}{a}$ که معرف حاصل‌ضرب دو ریشه است، عددی منفی می‌شود).

۳) $af(\alpha) \leq 0$ (α، عددی حقیقی و دلخواه). می‌دانیم، اگر

سه‌جمله‌ای درجه دوم ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، هر عدد دلخواه حقیقی را به‌جای x بگذاریم، حاصل سه‌جمله‌ای علامتی موافق علامت a پیدا می‌کند؛ اگر سه‌جمله‌ای ریشه‌های موهومی داشته باشد، وقتی α را به‌جای x بگذاریم، $f(\alpha)$ همان علامت a را دارد و، بنابراین، $af(\alpha)$ مثبت می‌شود.

اگر $af(\alpha) = ۰$، آن وقت α یکی از ریشه‌ها است؛

اگر $af(\alpha) < ۰$، آن‌وقت سه‌جمله‌ای ریشه‌های حقیقی دارد و عدد α، بین دو ریشه واقع است (زیرا، اگر α در بیرون دو ریشه باشد، $f(\alpha)$ با a هم‌علامت می‌شود).

به این ترتیب، شرط $af(\alpha) \leq ۰$، *شرط کافی ولی غیرلازم* برای حقیقی بودن ریشه‌ها است.

۴) $f(\alpha)f(\beta) \leq ۰$ (α و β، عددهایی حقیقی و دلخواهند). در واقع، اگر داشته باشیم $f(\alpha)f(\beta) = ۰$، یکی از ریشه‌ها برابر α یا برابر β است (و یا به احتمالی، یکی از ریشه‌ها α و دیگری β است).

در حالت $f(\alpha)f(\beta) < ۰$، باید $f(\alpha)$، $f(\beta)$ علامت‌های مختلفی داشته باشد، یعنی یکی از آن‌ها علامتی مخالف علامت a پیدا می‌کند و، درنتیجه، سه‌جمله‌ای ریشه‌های حقیقی دارد.

شرط $f(\alpha)f(\beta) < ۰$ هم، **شرطی کافی و غیرلازم** است؛ با این شرط دو نتیجه به دست می‌آید: اول، این‌که، سه‌جمله‌ای دو ریشهٔ حقیقی دارد و دوم، یکی از ریشه‌ها بین α و β و دیگری در بیرون α و β است. اگر $\alpha < \beta$ و $x_۱ < x_۲$ باشد ($x_۱$ و $x_۲$، ریشه‌های سه‌جمله‌ای‌اند)، آن‌وقت $\alpha < x_۱ < \beta < x_۲$ و یا $x_۱ < \alpha < x_۲ < \beta$.

مثال ۱۴. a، b و c، *طول‌های سه ضلع یک مثلث‌اند. ثابت کنید،*

$$(a+b-c)x^{2}+kx+a-b-c=0$$

به‌ازای هر مقدار حقیقی k، دو ریشهٔ حقیقی دارد که یکی از آن مثبت و دیگری منفی است.

حل. می‌دانیم، در هر مثلث، مجموع طول‌های دوضلع، از طول ضلع سوم بزرگتر است. بنابراین

$$a+b>c \Rightarrow a+b-c>0$$

$$b+c>a \Rightarrow a-b-c<0$$

و از آنجا $(a+b-c)(a-b-c)<0$. یعنی ضریب x^{2} با مقدار ثابت معادله، علامت‌های مختلفی دارند و بنا به معیار ۲) : معادله دو ریشهٔ حقیقی و با علامت‌های مختلف دارد.

مثال ۱۵ . *ثابت کنید، سه‌جمله‌ای درجه دوم*

$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) \quad (1)$$

به‌ازای هر مقدار حقیقی a و b و c، همیشه دارای دو ریشهٔ حقیقی است. این ریشه‌ها، در چه محدوده‌ای قرار دارند؟

حل: بدون این‌که به کلی بودن مساله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $a<b<c$ (در حالت برابر بودن دو عدد یا هر سه عدد a و b و c، حقیقی بودن ریشه‌ها روشن است؛ آزمایش کنید). در این صورت داریم:

$$f(b)=(b-a)(b-c)<0$$

(بنا به شرط b از a بزرگتر و از c کوچکتر است). عبارت (۱)، درجه دوم است و جملهٔ درجه دوم آن برابر $۳x^۲$ است، یعنی ضریب $x^۲$ مثبت است. $f(b)$ منفی و ضریب $x^۲$ مثبت است، یعنی معادله دو ریشه حقیقی دارد که، درضمن، یکی از ریشه‌ها از b کوچکتر و دیگری از b بزرگتر است.

می‌توانستیم $f(a)f(b)$ یا $f(b)f(c)$ را به‌دست بیاوریم. مثلاً

$$f(a)f(b) = [a-b)(a-c)] \cdot [(b-a)(b-c)] =$$
$$= -(a-b)^۲(a-c)(b-c) < ۰$$

یعنی سه‌جمله‌ای درجه دوم $f(x)$ دو ریشهٔ حقیقی دارد؛ یکی از دو عدد a و b بین دو ریشه و دیگری بیرون دو ریشه است. با محاسبه $f(b)f(c)$ هم، به این نتیجه می‌رسیم که از b و c، یکی بین دو ریشه و دیگری بیرون دو ریشه است. با جمع‌بندی دو نتیجه، به‌دست می‌آید:

$$a < x_۱ < b < x_۲ < c$$

یکی از ریشه‌های بین a و b و دیگری بین b و c است.

تمرین‌ها

۶۲. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ۳$$

۶۳. ترازویی دوکفه‌ای در اختیار داریم که، در آن، طول دو بازوی شاهین با هم برابر نیستند، یعنی ترازوی ما، وزن را با دقت معین نمی‌کند. نصف کالایی را در یک کفه و نصف دوم را در کفهٔ دیگر وزن کرده‌ایم. آیا به این ترتیب توانسته‌ایم وزن درست کالا را به‌دست آوریم؟

۶۴. x و y و z عددهایی مثبت‌اند و می‌دانیم $xyz = ۱$. ثابت کنید:

$$(x+۱)(y+۱)(z+۱) \geq ۸$$

۶۵. $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی مثبت‌اند و مجموعی برابر k دارند. ثابت کنید:

$$\sqrt{a_۱ a_۲} + \sqrt{a_۲ a_۳} + \sqrt{a_۳ a_۱} \leq k$$

*۶۶. طول‌های ضلع‌های یک مثلث برابرند با a، b و c. ثابت کنید:

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

*۶۷. درستی این نابرابری را ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \ldots \times \frac{۹۹}{۱۰۰} < \frac{۱}{۱۰}$$

*۶۸. نابرابری کوشی را، برای ۶ عدد مثبت و، سپس، به کمک آن، برای ۵ عدد مثبت ثابت کنید.

۶۹. ثابت کنید، برای دو عدد مثبت a و b، همیشه داریم:

$$\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}} \geq \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

۷۰. از بین همهٔ مستطیل‌های با محیط برابر $۲p$، مساحت کدام مستطیل از همه بیشتر است؟

*۷۱. ورقهٔ آهن سفید مربع شکلی با ضلع به طول a در اختیار داریم. از چهار گوشهٔ مربع، مربع‌های کوچکی با ضلع به طول x جدا کرده‌ایم

و، سپس، از شکل باقی‌مانده، یک جعبهٔ به شکل مکعب مستطیل روباز ساخته‌ایم. x را چقدر بگیریم تا حجم جعبه‌ای که به دست می‌آید، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

*۷۲. می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع برابر R، مخروطی محاط کنیم (راس مخروط محاطی روی سطح کره قرار می‌گیرد و محیط دایرهٔ قاعدهٔ مخروط، منطبق بر سطح کره است). ارتفاع مخروط را چگونه انتخاب کنیم تا حجم مخروط، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

*۷۳. بیشترین و کمترین مقدار $y = \dfrac{\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵}{۳ - ۲\cos x}$ را پیدا کنید.

۷۴. هریک از این نامعادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{۲ - x} < -۱; \qquad ۲)\ -\frac{۱}{۵}(۳x + ۲) > -۳;$$
$$۳)\ ۳ - ۵x > ۱۱ + ۲x; \quad ۴)\ (۱ - ۴x)(x^۲ + ۱) \leq ۰;$$

۷۵. به‌ازای چه مقداری از m، معادلهٔ درجه دوم، دو ریشهٔ حقیقی و نابرابر دارد.

$$۱)\ x^۲ - (۲m + ۱)x + m^۲ + m + ۱ = ۰,$$
$$۲)\ (m - ۱)x^۲ + ۲mx + m + ۱ = ۰,$$
$$۳)\ mx^۲ - (۲m + ۳)x + m - ۱ = ۰,$$
$$۴)\ x^۲ - mx + m - ۱ = ۰,$$
$$۵)\ (۲m - ۱)x^۲ + x - ۱ = ۰,$$
$$۶)\ x^۲ - mx + m + ۱ = ۰$$
$$۷)\ (x - m)(x - ۲) + (x - m)(x + ۱) + (x - ۲)(x + ۱) = ۰$$

۷۶. مقدار x را پیدا کنید، به‌نحوی که هریک از این نابرابری‌ها برقرار باشند:

$$۱)\ (x-۱)(x-۲) > ۳۰, \quad ۲)\ (۲x+۱)(x-۱) > (x-۲)(x+۲),$$
$$۳)\ x+۱ < \frac{۱}{x+۱}, \quad ۴)\ x-\frac{۱}{x} \le \frac{۱۵}{۴},$$
$$۵)\ \frac{x+۳}{x+۲} \le ۱, \quad ۶)\ \frac{x-۴}{x+۴} \ge \frac{x+۴}{x-۴}$$

*۷۷. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c,$$
$$۲)\ \frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=۲\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right),$$

۷۸. این دستگاه‌های چهار معادلهٔ چهارمجهولی را حل کنید:

$$(۱)\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+u=b \\ x+z+u=c \\ y+z+u=d \end{cases}, \quad ۲)\begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=a \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{u}=b \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{u}=c \\ \frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{u}=d \end{cases}$$

۷۹. می‌دانیم $a < b < c < d$. ثابت کنید، این معادلهٔ درجه دوم، به‌ازای هر مقدار حقیقی λ، همواره دو ریشهٔ حقیقی دارد:

$$(x-a)(x-c)+\lambda(x-b)(x-d)=۰$$

۸۰. می‌دانیم $pp_1 = 2(q + q_1)$. ثابت کنید، دست‌کم یکی از این دو معادله، ریشه‌های حقیقی دارد:

$$x^2 + px + q = 0, \; x^2 + p_1x + q_1 = 0$$

۸۱. ثابت کنید، عددهای حقیقی a، b و c، هرچه باشند، این معادله، همواره دو ریشهٔ حقیقی دارد:

$$a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$$

۸۲. به شرط $x + y + z = a$، ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}a^2$$

۸۳. ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + ax + b = 0$ را x_1 و x_2 می‌نامیم. اگر فرض کنیم $S_k = x_1^k + x_2^k$، مطلوب است محاسبهٔ

$$1)\; S_{-1}, \quad 2)\; S_2, \quad 3)\; S_{-2}, \quad 4)\; S_3, \quad 5)\; S_{-3}, \quad 6)\; S_4,$$
$$7)\; S_{-4}, \quad 8)\; S_{\frac{1}{2}}, \quad 9)\; S_{-\frac{1}{2}}, \quad 10)\; S_{\frac{1}{4}}, \quad 11)\; S_{-\frac{1}{4}}$$

۸۴. شرط وجود یک ریشهٔ مشترک را، برای هر حالت بنویسید:

$$1)\; x^2 + px + q = 0, \; x^2 + p_1x + q_1 = 0$$
$$2)\; ax^2 + bx + c = 0, \; a'x^2 + b'x + c' = 0$$
$$3)\; 2x^2 + mx - (m+2) = 0,$$
$$2mx^2 - (m+5)x + 5 - m = 0$$

۸۵. هریک از این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$
1)\begin{cases} x(x+y+z)=a^2 \\ y(x+y+z)=b^2 \\ z(x+y+z)=c^2 \end{cases},\quad 2)\begin{cases} x(x+y+z)=a-yz \\ y(x+y+z)=b-xz \\ z(x+y+z)=c-xy \end{cases},
$$

$$
3)\begin{cases} xy=oz \\ yz=bx \\ xz=cy \end{cases},\quad *4)\begin{cases} x^3=ax+by \\ y^3=bx+ay \end{cases}
$$

***۸۶.** می‌دانیم: $xyz=abc$ و

$$
x^2(y+z)=a^3,\quad y^2(x+z)=b^3,\quad z^2(x+y)=c^3
$$

چه رابطه‌ای بین a، b و c وجود دارد؟

۸۷. برای هریک از این معادله‌ها، شرط وجود جواب‌های حقیقی را پیدا کنید:

$$
1)\ a\tan x+b\cot x=c,\quad *2)\ a\sin x+b\cos x=c
$$

۸۸. این معادلهٔ درجه دوم داده شده است:

$$
(m-1)x^2-3mx+1-m=0
$$

۱) چرا این معادله، به‌ازای هر مقدار حقیقی m، دو ریشهٔ حقیقی دارد؟

۲) m را طوری پیدا کنید که، مجموع دو ریشهٔ این معادله، از حاصل‌ضرب آن‌ها کمتر باشد.

۳) آیا ممکن است، در این معادله، مجموع مجذورهای دو ریشه، از مجموع عکس‌های دو ریشه، کوچکتر باشد؟

*۸۹. الف) به‌ازای چه مقدارهایی از m، یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم

$$(m+۲)x^{۲}-(m+۱)x+m=۰ \qquad (*)$$

از ۱ کوچکتر و دیگری از ۱ بزرگتر است؟

ب) به‌ازای چه مقدارهایی از m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ (*) بین ۱ و ۲ و دیگری بزرگتر از ۲ است؟

۹۰. این نامعادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}\geq\frac{۱}{x+۲}-\frac{۱}{x+۳},\quad ۲)\ \frac{a^{۲}+۱}{a-x}>a$$

۳. مثلثات

§۱. یادآوری

در این بند، کوتاه شدهٔ بخش ۲ از جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» (صفحه‌های ۵۲ تا ۹۲) را آورده‌ایم. سفارش می‌کنیم، بخشی را که نام بردیم، در جلد دوم مطالعه بفرمایید.

۱. در مثلثات، کمان‌های دایره را، بیشتر با واحد رادیان بیان می‌کنند: یک رادیان، کمانی از دایره است که طول آن برابر با طول شعاع همان دایره باشد. بنابراین، محیط دایره، که برابر ۳۶۰ درجه یا ۴۰۰ گراد است، برابر با ۲π رادیان (اندکی کمتر از ۶٫۳ رادیان) می‌شود. هرگاه، کمان یا زاویه را با واحد درجه یا گراد بیان کنیم، باید نام واحد را بیاوریم: کمان ۳۰ درجه، زاویهٔ ۷۴ گراد، کمان x درجه، ... درجه را با نماد $^\circ$ و گراد را با نماد g نشان می‌دهند:

$$۳۰^\circ,\ ۷۴^g,\ x^\circ$$

ولی هرگاه کمان یا زاویه برحسب واحد رادیان آمده باشد، لازم نیست نام واحد را بیاوریم: کمان $\frac{\pi}{۳}$ یعنی $\frac{\pi}{۳}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۲}{۵}$ یعنی زاویه‌ای برابر $\frac{۲}{۵}$

رادیان، درضمن

$$۱\ \text{رادیان} \approx ۵۷° \quad ۱۷' \quad ۴۴/۸'',$$

$$۱\ \text{درجه} \approx ۰/۰۱۷۴۵۳\ (\text{رادیان})$$

۲. آغاز کمان‌ها را، در دایرهٔ مثلثاتی، می‌توان در هر نقطه‌ای از محیط دایره در نظر گرفت. ولی در صورتی که ضرورت، وضع دیگری را به ما تحمیل نکند، معمول است که، آغاز کمان‌ها را در نقطهٔ سمت راست قطر افقی می‌گیرند.

در دایرهٔ مثلثاتی، شعاع دایره را واحد اندازه‌گیری به حساب می‌آورند. وقتی می‌گوییم $\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$، یعنی سینوس کمان $\frac{\pi}{۶}$ رادیان (که همان ۳۰ درجه است)، برابر است با نصف طول شعاع دایره‌ای که سینوس را روی آن نشان داده‌ایم. به همین مناسبت، بهتر است کمان‌ها برحسب رادیان بیان شوند تا واحد کمان هم، برابر با طول شعاع دایره باشد.

جهت حرکت در روی محیط دایرهٔ مثلثاتی، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است. وقتی می‌گوییم کمان AM، منظور کمانی است که آغاز آن نقطهٔ A و پایان آن نقطهٔ M است. بنابراین بی‌نهایت کمان AM به‌دست می‌آید. اگر کوچکترین این کمان‌ها را α بنامیم، کمان‌های $۲\pi + \alpha$، $۴\pi + \alpha$، ...، $۲k\pi + \alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$ هم با AM نشان داده می‌شوند.

قطری که از آغاز کمان‌ها می‌گذرد، همراه با قطر عمود بر آن دایرهٔ مثلثاتی را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنند که (اگر از آغاز کمان‌ها و در جهت مثلثاتی حرکت کنیم)، آن‌ها را به‌ترتیب یک‌چهارم اول، یک‌چهارم دوم، یک‌چهارم سوم و یک‌چهارم چهارم (یا ربع اول، ربع دوم، ربع سوم، ربع چهارم) نام نهاده‌اند.

۳. اگر کمان AM را در نظر بگیریم (M، نقطهٔ پایان کمان است)، آن‌وقت

الف) وقتی نقطهٔ M در ربع اول یا دوم باشد، سینوس AM مثبت و وقتی در ربع سوم یا چهارم باشد، سینوس آن منفی است. عادت شده است که، به صورتی کوتاه می‌گویند: سینوس در ربع اول و دوم مثبت و در ربع سوم و چهارم منفی است.

ب) کسینوس در ربع‌های اول و چهارم مثبت و در ربع‌های دوم و سوم منفی است.

ج) تانژانت و کتانژانت در ربع‌های اول و سوم مثبت و در ربع‌های دوم و چهارم منفی‌اند. تانژانت در نقطه‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ و کتانژانت در نقطه‌های ۰ و π معنی ندارند.

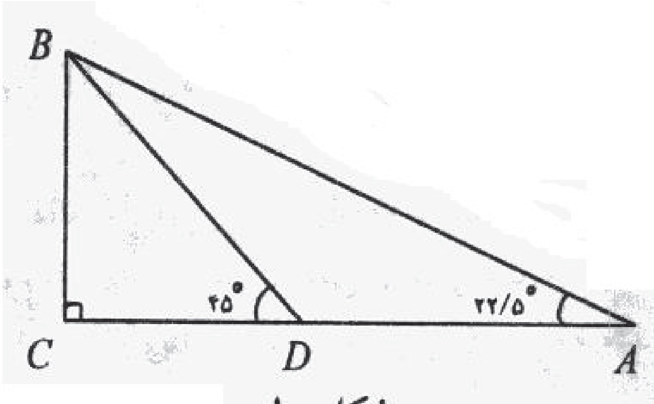
تانژانت یا کتانژانت یک کمان، می‌تواند برابر هر عدد حقیقی باشد؛ ولی مقدارهای سینوس و کسینوس یک کمان، نمی‌تواند از ۱ بیشتر یا از ۱− کمتر باشد:

$$\tan x \in \mathbf{R},\ \cot x \in \mathbf{R},\ |\sin x| \leq ۱,\ |\cos x| \leq ۱$$

۴. اگر کمانی نامنفی باشد و از $\frac{\pi}{۲}$ (۹۰ درجه) تجاوز نکند، با بزرگتر شدن کمان، سینوس و تانژانت آن بزرگتر، ولی کسینوس و کتانژانت آن کوچکتر می‌شوند. رابطهٔ بین کمان را با خطهای مثلثاتی، وقتی انتهای کمان بتواند روی محیط دایره و در جهت مثلثاتی حرکت کند، در جدول ۱ می‌بینید.

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
sin x	۰	↗	۱	↘	۰	↘	۱−	↗	۰
cos x	۱	↘	۰	↘	۱−	↗	۰	↗	۱
tan x	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۰
cot x	$+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$

جدول ۱



شکل ۱۰

می‌گویند: سینوس در ربع اول و چهارم صعودی و در ربع‌های دوم و سوم نزولی است؛ کسینوس در ربع‌های اول و دوم نزولی و در ربع‌های سوم و چهارم صعودی است؛ تانژانت همواره صعودی و کتانژانت همواره نزولی است.

۵. مقدارهای سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت برخی کمان‌های مثبت و حاده را، در جدول ۲ داده‌ایم.

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۱۲}(۱۵^\circ)$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}(۷۵^\circ)$	$\frac{\pi}{۲}(۹\circ^\circ)$
$\sin x$	$\circ$	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	۱
$\cos x$	۱	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	$\circ$
$\tan x$	$\circ$	$۲-\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$	–
$\cot x$	–	$۲+\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$۲-\sqrt{۳}$	$\circ$

جدول ۲

مثال ۱. *مطلوب است محاسبهٔ خط‌های مثلثاتی* $\frac{\pi}{۸}$ *(۲۲ درجه ۳۰ دقیقه) و* $\frac{۳\pi}{۸}$ *(۶۷ درجه و ۳۰ دقیقه).*

حل. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، فرض می‌کنیم (شکل ۱۰)

$$\widehat{CAB} = ۲۲^\circ۳۰', \ \widehat{CBA} = ۶۷^\circ۳۰', \ |BC| = ۱$$

از نقطهٔ C، روی ضلع CA، نقطهٔ D را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$|CD| = |CB| = ۱$$

و از B به D وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ DBC، متساوی‌الساقین است و بنابراین

$$\widehat{CDB} = \widehat{CBD} = ۴۵^\circ$$

و از آن‌جا $\widehat{DBA} = ۶۷/۵^\circ - ۴۵^\circ = ۲۲/۵^\circ$، یعنی

$$|DA| = |DB|$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ DBC به‌دست می‌آید $|BD| = \sqrt{۲}$، پس

$$|DA| = \sqrt{۲}, \ |CA| = ۱ + \sqrt{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$|AB|^۲ = |AC|^۲ + |CB|^۲ \Rightarrow |AB| = \sqrt{۲(۲ + \sqrt{۲}}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABC، خط‌های مثلثاتی زاویهٔ A $\left(\frac{\pi}{۸}\right)$ را محاسبه کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{۸} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{۱}{\sqrt{۲(۲+\sqrt{۲})}} =$$

$$= \frac{۱ \times \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{\sqrt{۲(۲+\sqrt{۲}) \times \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲};$$

$$\cos\frac{\pi}{۸}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲(۲+\sqrt{۲})}}=\frac{(۱+\sqrt{۲})\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^{۲}(۲-\sqrt{۲})}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}};$$

$$\tan\frac{\pi}{۸}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}-۱;$$

$$\cot\frac{\pi}{۸}=\sqrt{۲}+۱$$

پاسخ. برای زاویه‌های ۲۲ درجه و ۳۰ دقیقه و ۶۷ درجه و ۳۰ دقیقه داریم:

$$\sin ۲۲/۵^\circ=\cos ۶۷/۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}};$$

$$\cos ۲۲/۵^\circ=\sin ۶۷/۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}};$$

$$\tan ۲۲/۵^\circ=\cot ۶۷/۵^\circ=\sqrt{۲}-۱;$$

$$\cot ۲۲/۵^\circ=\tan ۶۷/۵^\circ=\sqrt{۲}+۱$$

۶. k را عددی درست (مثبت، منفی یا صفر) فرض می‌کنیم ($k\in\mathbf{Z}$). در این صورت:

الف) اگر $۲k\pi$ به کمانی اضافه شود، هیچ‌کدام از خطهای مثلثاتی آن تغییر نمی‌کند:

$$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha,\ \cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\tan(۲ku+\alpha)=\tan\alpha,\ \cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

ب) اگر مضرب فردی از π، یعنی $\pi(۱+۲k)$ به کمانی اضافه شود، تانژانت و کتانژانت آن تغییر نمی‌کند، ولی سینوس و کسینوس آن تغییر علامت

می‌دهد:

$$\sin[(۲k+۱)\pi+\alpha] = -\sin\alpha,\ \tan[(۲k+۱)\pi+\alpha] = \tan\alpha$$

ج) بستگی بین خطهای مثلثاتی دو زاویهٔ قرینه:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha,\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

نتیجه. بستگی بین خطهای مثلثاتی دو کمان یا دو زاویه‌ای که مکمل یکدیگرند، یعنی کمانهای α و $\pi-\alpha$:

$\sin(\pi-\alpha)$، بنابر ب)، چون مضرب فردی از π به $-\alpha$ اضافه شده است، برابر است با $-\sin(-\alpha)$ و چون، بنا بر ج) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$، پس

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

به همین ترتیب $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ و $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

د) برای دو زاویه یا دو کمان متمم یکدیگر (که مجموعی برابر $\frac{\pi}{۲}$ یا ۹۰ درجه دارند)، یعنی α و $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = \cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}=\alpha\right) = \cot\alpha,\ \cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = \tan\alpha$$

هـ) دو زاویه یا دو کمانی که تفاضلی برابر $\frac{\pi}{۲}$ دارند:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) = \cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) = -\cot\alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) = -\tan\alpha$$

مثال ۲. مقدار هر خط مثلثاتی را پیدا کنید.

$$۱)\ \sin ۱۳۵^\circ, \quad ۲)\ \cos ۲۲۵^\circ, \quad ۳)\ \tan ۳۱۵^\circ,$$
$$۴)\ \cot ۱۰۵^\circ, \quad ۵)\ \sin(۱۱۲^\circ ۳۰'), \cos ۱۱۵۵^\circ$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۱)\ \sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲},$$

$$۲)\ \cos ۲۲۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲},$$

$$۳)\ \tan ۳۱۵^\circ = \tan(۲ \times ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) =$$
$$= \tan(-۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱,$$

$$۴)\ \cot ۱۰۵^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\tan ۱۵^\circ = \sqrt{۳} - ۲,$$

$$۵)\ \sin(۱۱۲^\circ ۳۰') = \sin(۹۰^\circ + ۲۲/۵^\circ) =$$
$$= \cos ۲۲/۵^\circ = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}},$$

$$۶)\ \cos ۱۱۵۵^\circ = \cos(۳ \times ۳۶۰^\circ + ۷۵^\circ) =$$
$$= \cos ۷۵^\circ = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$$

۷. بستگی بین خط‌های مثلثاتی یک کمان. برای هر کمان x داریم:

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱, \quad \tan x \cdot \cot x = ۱$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x, \quad \frac{۱}{\sin^۲ x} = ۱ + \cot^۲ x,$$
$$\sec x = \frac{۱}{\cos x}, \quad \text{cosec}x = \frac{۱}{\sin x}$$

مثال ۳. *α کمانی است که انتهای آن در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی است و می‌دانیم $\cos\alpha = \frac{۷}{۲۵}$. سینوس و تانژانت کمان α را پیدا کنید.*

حل. وقتی انتهای کمانی در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، کسینوس آن مثبت، ولی سینوس و تانژانت آن منفی است. پس

$$\sin\alpha = -\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha} = -\sqrt{۱-\frac{۴۹}{۶۲۵}} = -\sqrt{\frac{۵۷۶}{۶۲۵}} = -\frac{۲۴}{۲۵},$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{۲۴}{۲۵}\right) : \frac{۷}{۲۵} = -\frac{۲۴}{۷}$$

مثال ۴. *می‌دانیم $\sin x + \cos x = ۱/۴$. اگر x زاویه‌ای حاده و مثبت باشد، مقدار $\tan x$ را پیدا کنید. درضمن $x < \frac{\pi}{۴}$.*

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\sin x + \cos x = ۱/۴ = \frac{۷}{۵};$$

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x + ۲\sin x\cos x = \frac{۴۹}{۲۵};$$

$$۱ + ۲\sin x \cos x = \frac{۴۹}{۲۵}; \qquad \sin x\cos x = \frac{۱۲}{۲۵}$$

مجموع و حاصل‌ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را در اختیار داریم:

$$\sin x\cdot\cos x = \frac{۱۲}{۲۵}, \quad \sin x + \cos x = \frac{۷}{۵}$$

بنابراین $\sin x$ و $\cos x$، ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم‌اند:

$$t^{۲} - \frac{۷}{۵}t + \frac{۱۲}{۲۵} = ۰$$

درضمن ریشهٔ کوچکتر معادله، متعلق به $\sin x$ است، زیرا برای

$$\circ < x < \frac{\pi}{۴}$$

همواره $\sin x < \cos x$. ریشه‌های این معادله برابر $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۵}$ است. بنابراین

$$\sin x = \frac{۳}{۵},\ \cos x = \frac{۴}{۵}$$

از آن‌جا $\tan x = \frac{۳}{۴}$.

۲§. محاسبهٔ خط‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ برحسب خط‌های مثلثاتی α و β

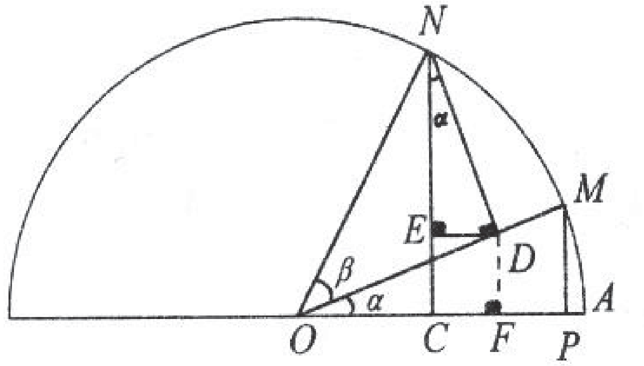
روشن است که $\sin(\alpha+\beta)$ با $\sin\alpha + \sin\beta$ فرق دارد. مثلاً

$$\sin ۳\circ^\circ = \frac{۱}{۲},\ \sin ۶\circ^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲};\ \sin ۳\circ^\circ + \sin ۶\circ^\circ = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲},$$
$$\sin(۳\circ^\circ + ۶\circ^\circ) = \sin ۹\circ^\circ = ۱$$

و $۱{,}۳۶ \approx \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲} \neq ۱$.

بنابراین، باید راهی را جست‌وجو کرد که، به‌یاری آن، بتوان با در دست داشتن مقدارهای سینوس و کسینوس α و مقدارهای سینوس و کسینوس β، مقدارهای سینوس و کسینوس $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ را به‌دست آورد. این رابطه‌ها را در هزار سال پیش، ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بورجانی پیدا کرده بودند.

در دایرهٔ مثلثاتی به مرکز O، کمان AM را برابر α و کمان MN را به دنبال آن برابر β جدا می‌کنیم (α و β را در شکل ۱۱، حاده گرفته‌ایم؛



شکل ۱۱

درضمن، در این شکل، تنها نیم دایرهٔ بالا را رسم کرده‌ایم). به سادگی و از روی شکل دیده می‌شود:

$$|PM| = \sin\alpha,\ |OP| = \cos\alpha,\ |DN| = \sin\beta,$$
$$|OD| = \cos\beta,\ |CN| = \sin(\alpha+\beta)$$

از N عمود ND را بر OM و، سپس، از D عمود DF را بر OA و عمود DE را بر NC رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه OFD داریم:

$$\sin\alpha = \frac{|DF|}{|OD|} \Rightarrow |DF| = \sin\alpha \cdot |OD|$$

ولی $|OD| = \cos\beta$، پس

$$|DF| = \sin\alpha\cos\beta \qquad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه EDN داریم:

$$\cos\alpha = \frac{|NE|}{|ND|} \Rightarrow |NE| = \cos\alpha \cdot |ND|$$

ولی $|ND| = \sin\beta$، پس

$$|NE| = \cos\alpha\sin\beta \qquad (۲)$$

توجه کنید، ضلع‌های زاویهٔ CND بر ضلع‌های زاویهٔ AOM عمودند، بنابراین، این دو زاویه برابرند و $\widehat{CND} = \alpha$.

اکنون، باتوجه به شکل ۱۱ و برابری‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\sin(\alpha + \beta) = |CN| = |CE| + |EN| =$$
$$= |DF| + |NE| = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

به این برابری جالب و مهم رسیدیم:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \quad \text{(I)}$$

اگر در دو طرف این برابری (که یک اتحاد مثلثاتی است)، β را به $-\beta$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \quad \text{(II)}$$

برای محاسبهٔ $\cos(\alpha + \beta)$، از سینوس متمم آن استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left[\frac{\pi}{۲} - (\alpha + \beta)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) - \beta\right] =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)\sin\beta$$

و به‌این ترتیب

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad \text{(III)}$$

و با تبدیل β به $-\beta$ در دو طرف برابری:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \quad \text{(IV)}$$

روشن است، با در دست داشتن $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ می‌توان $\tan(\alpha+\beta)$ را پیدا کرد:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

بهتر است $\tan(\alpha+\beta)$ را برحسب $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ به‌دست آوریم. برای این منظور، با فرض $\cos\alpha\neq ۰$ و $\cos\beta\neq ۰$، صورت و مخرج کسر را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}}\quad (V)$$

و با تبدیل β به $-\beta$ در دو طرف برابری:

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}}\quad (VI)$$

برای $\cot(\alpha+\beta)$ و $\cot(\alpha-\beta)$، کافی است دستورهای (V) و (VI) را معکوس کنیم.

مثال ۵. *اگر x و y زاویه‌هایی حاده باشند و داشته باشیم:*

$$\tan x=\frac{۱۲}{۵},\ \tan(x-y)=\frac{۳۳}{۵۶}$$

مقدار $\cos y$ را پیدا کنید.

حل. در دستور (VI)، به‌جای $\tan(x-y)$ و $\tan x$، مقدارشان را قرار می‌دهیم. به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳۳}{۵۶}=\frac{\frac{۱۲}{۵}-\tan y}{۱+\frac{۱۲}{۵}\tan y};\ \frac{۳۳}{۵۶}=\frac{۱۲-۵\tan y}{۵+۱۲\tan y};$$

$$۱۶۵ + ۳۹۶\tan y = ۶۷۲ - ۲۸۰\tan y;$$
$$۶۷۶\tan y = ۵۰۷;\ \tan y = \frac{۵۰۷}{۶۷۶} = \frac{۳}{۴}$$

اکنون، با در دست داشتن $\tan y$، مقدار $\cos y$ قابل محاسبه است:

$$\cos^۲ y = \frac{۱}{۱ + \tan^۲ y} = \frac{۱}{۱ + \frac{۹}{۱۶}} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

و چون y زاویه‌های حاده است: $\cos y = \frac{۴}{۵}$.

مثال ۶. *مطلوب است محاسبهٔ تانژانت ۷ درجه و ۳۰ دقیقه.*

حل. $۷/۵^\circ = ۶۷/۵^\circ - ۶۰^\circ$، با در دست داشتن

$$\tan ۶۷/۵^\circ = \sqrt{۲} + ۱,\ \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

و استفاده از دستور (VI)، می‌توان تانژانت ۷/۵ درجه را به‌دست آورد:

$$\tan ۷/۵^\circ = \tan(۶۷/۵^\circ - ۶۰^\circ) = \frac{\tan ۶۷/۵^\circ - \tan ۶۰^\circ}{۱ + \tan ۶۷/۵^\circ \tan ۶۰^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۳}}{۱ + (\sqrt{۲} + ۱)\sqrt{۳}} = \frac{۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۳}}{۱ + \sqrt{۳} + \sqrt{۶}} =$$
$$\frac{(۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۳})[\sqrt{۶} - (۱ + \sqrt{۳})]}{[\sqrt{۶} + (۱ + \sqrt{۳})][\sqrt{۶} - (۱ + \sqrt{۳})]} = \frac{۱ + \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲}}{-(\sqrt{۳} + ۱)} =$$
$$= \frac{(۲\sqrt{۲} - \sqrt{۳} - ۱)(\sqrt{۳} - ۱)}{(\sqrt{۳} + ۱)(\sqrt{۳} - ۱)} = \sqrt{۶} - \sqrt{۳} + \sqrt{۲} - ۲$$

مثال ۷. *می‌دانیم* $\sin x + \sin y = a$ و $\cos x + \cos y = b$. *مطلوب است محاسبه* $\cos(x - y)$.

حل. اگر دو برابری فرض را مجذور کنیم:

$$\sin^۲ x + \sin^۲ y + ۲\sin x \sin y = a^۲,$$
$$\cos^۲ x + \cos^۲ y + ۲\cos x \cos y = b^۲$$

از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$۲ + ۲(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = a^۲ + b^۲$$

و درنتیجه $\cos(x-y) = \frac{a^۲ + b^۲ - ۲}{۲}$.

§۳. دستورهای دیگر

اگر در دستورهای مربوط به $\sin(\alpha+\beta)$، $\cos(\alpha+\beta)$ و $\tan(\alpha+\beta)$، فرض کنیم $\beta = \alpha$، به این سه دستور، برای محاسبهٔ خط‌های مثلثاتی کمان ۲α می‌رسیم:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{(VII)}$$
$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \qquad \text{(VIII)}$$
$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha} \qquad \text{(IX)}$$

این دستورها، خط‌های مثلثاتی یک کمان را برحسب خط‌های مثلثاتی نصف آن کمان می‌دهند. دستور (VIII) را به یکی از این دو صورت هم می‌توان نوشت:

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \qquad \text{(VIII)}'$$
$$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \qquad \text{(VIII)}''$$

و یا به یکی از این دو صورت، که در محاسبه‌ها کاربرد بسیاری دارند:

$$\cos^۲\alpha = \frac{۱ + \cos ۲\alpha}{۲}, \ \sin^۲\alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲}$$

دو رابطهٔ مهم دیگر

این دستورها را می‌شناسیم:

$$\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm ۱}{\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}}$$

$$\sin^۲\alpha = \frac{\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\pm\tan\alpha}{\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}}$$

اکنون، با توجه به این دستورها و دستورهای (VII) و (VIII) می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲} = ۲\times\frac{\pm ۱}{\sqrt{۱+\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}}\cdot\frac{\pm\tan\frac{\alpha}{۲}}{\sqrt{۱+\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}};$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}} \qquad (*)$$

به همین ترتیب، به‌دست می‌آید

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{۱-\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}} \qquad (**)$$

دستورهای (*) و (**)، همراه با دستور

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}}$$

که همان دستور (IX) است، خط‌های مثلثاتی یک کمان را برحسب تانژانت نصف آن کمان به‌دست می‌دهند.

مثال ۸. *این معادلهٔ درجه دوم داده شده است:*

$$(\sin\alpha\cos\alpha)x^{۲} - (\sin\alpha+\cos\alpha)x + ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

معادلهٔ درجه دومی بنویسید که، ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد.

حل. *روش اول.* ریشه‌های معادلهٔ جدید را $y_۱$ و $y_۲$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$y_۱ = x_۱^۲,\ y_۲ = x_۲^۲$$

مجموع و حاصل‌ضرب $y_۱$ و $y_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y_۱+y_۲ = x_۱^۲+x_۲^۲ = (x_۱+x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ =$$
$$= \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲}{(\sin\alpha\cos\alpha)^۲} - \frac{۲}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱+\sin ۲\alpha}{\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha} - \frac{۲}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} =$$
$$= \frac{۴(۱+\sin ۲\alpha) - ۴\sin ۲\alpha}{\sin^۲\alpha} = \frac{۴}{\sin^۲ ۲\alpha};$$

$$y_۱y_۲ = x_۱^۲x_۲^۲ = \frac{۱}{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha} = \frac{۴}{\sin^۲ ۲\alpha}$$

بنابراین، معادلهٔ درجه دوم جدید، به این صورت درمی‌آید:

$$y^{۲} - \frac{۴}{\sin^{۲} ۲\alpha} y + \frac{۴}{\sin^{۲} ۲\alpha} = ۰$$

پاسخ. $(\sin^{۲} ۲\alpha)y^{۲} - ۴y + ۴ = ۰$

روش دوم. اگر مجهول معادلهٔ جدید را y بنامیم، باید داشته باشیم:

$$y = x^{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

به‌جای x، در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$(\sin x \cos x)y \pm (\sin x + \cos x)\sqrt{y} + ۱ = ۰$$

معادله را گویا می‌کنیم. به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\right) y + ۱ = \pm(\sin\alpha + \cos x)\sqrt{y};$$

$$\left(\frac{۱}{۴}\sin^{۲} ۲\alpha\right) y^{۲} + (\sin ۲\alpha)y + ۱ = (۱ + \sin ۲\alpha)y;$$

$$\left(\frac{۱}{۴}\sin^{۲} ۲\alpha\right) y^{۲} - y + ۱ = ۰ \Rightarrow (\sin^{۲} ۲\alpha)y^{۲} - ۴y + ۴ = ۰$$

معادلهٔ (۱) و معادلهٔ جدید را حل و جواب را آزمایش کنید.

مثال ۹. *ثابت کنید، برای هر مقدار دلخواه کمان‌های a، b و c، همواره داریم:*

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} + \frac{\sin(b-c)}{\sin b \sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin c \sin a} = ۰$$

حل. کسر اول را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\sin a \sin b} =$$

$$= \frac{\sin a \cos b}{\sin a \sin b} - \frac{\cos a \sin b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos b}{\sin b} - \frac{\cos a}{\sin a} = \cot b - \cot a$$

به همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin b \sin c} = \cot c - \cot b;$$

$$\frac{\sin(c-a)}{\sin c \sin a} = \cot a - \cot c$$

و مجموع سه کسر برابر صفر می‌شود. در این مساله، روشن است که باید داشته باشیم:

$$a \neq k\pi,\ b \neq k\pi,\ c \neq k\pi,\ (k \in \mathbf{Z})$$

تمرین‌ها

۹۱. انتهای کمان α در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی است؛ درضمن می‌دانیم: $\tan a = ۲$. مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)$، $\tan\left(\frac{\pi}{۴}-\alpha\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{۳}-\alpha\right)$ را محاسبه کنید.

۹۲. زاویه‌ای را پیدا کنید که اگر عکس اندازهٔ عددی آن را برحسب گراد از عکس اندازهٔ آن بر حسب درجه کم کنیم، برابر با نسبت مقدار عددی آن برحسب رادیان به ۲π باشد.

۹۳. چه رابطه‌ای بین m و n برقرار است، اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲\cos x + \cot x = m \\ \cos x + ۲\cot x = n \end{cases}$$

۹۴. $\sin ۳\alpha$ را برحسب $\sin \alpha$ و $\cos ۳\alpha$ را برحسب $\cos \alpha$ محاسبه کنید.

۹۵. $\tan(x+y+z)$ را برحسب $\tan x$، $\tan y$ و $\tan z$ به‌دست آورید.

*۹۶. $\sin ۱۸^\circ$ را محاسبه کنید.

*۹۷. α را طوری پیدا کنید که چهار ریشهٔ معادلهٔ

$$x^۴ - \left(\frac{۱}{۳}\sin\alpha\right)x^۲ + \frac{۱}{۲۰۰}\cos\frac{\pi}{۳} = ۰$$

تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند و، سپس، معادله را حل کنید.

۹۸. اگر بدانیم $۴\sin a + ۳\cos a = ۵$، مقدار $\tan a$ را به‌دست آورید.

۹۹. الف) می‌دانیم: $a+b+c+d = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. ثابت کنید:

$$\sin(a+c)\sin(a+d) = \sin(b+c)\sin(b+d) \qquad (۱)$$

ب) با شرط $a-b=k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$، درستی برابری (۱) را ثابت کنید.

ج) α زاویه‌ای است حاده و مثبت. ثابت کنید:

$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

۱۰۰. تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{\sin x + \tan x}{\cos x + \cot x}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) دامنهٔ این تابع را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید، این تابع در دامنهٔ خود، همیشه مثبت است.

*۱۰۱. می‌دانیم، در تقسیم عدد درست n بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ به‌دست آمده است. ثابت کنید:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{۷}-\frac{۱۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(\frac{۳n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(\frac{۵n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)=۰$$

۱۰۲. الف) $\tan\frac{n\pi}{۳}$ $(n\in\mathbf{Z})$ را محاسبه کنید.

ب) $\sin\left(\frac{n\pi}{۳}+(-۱)^n\frac{\pi}{۶}\right)$ را محاسبه کنید $(n\in\mathbf{Z})$.

۱۰۳. m را طوری پیدا کنید که، این عبارت، مستقل از x باشد:

$$A=\sin^۶ x+\cos^۶ x+m(\sin^۴ x+\cos^۴ x)$$

۱۰۴. کمان α را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید، به شرطی که الف) $\cos\alpha=۲\sin\alpha$؛ ب) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۶}{۵}$.

۱۰۵. می‌دانیم $a-b=\frac{\pi}{۳}$ مطلوب است محاسبهٔ

$$(\cos a+\cos b)^۲+(\sin a+\sin b)^۲$$

۱۰۶. α و β دو کمان حاده و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$$

۱۰۷. الف) $\tan\alpha$ معلوم است. $\sin ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha$، هرکدام، چند مقدار می‌توانند اختیار کند؟ ب) اگر $\tan ۲\alpha$ معلوم باشد، $\sin\alpha$ چند جواب دارد؟ $\cos\alpha$ چطور؟

۱۰۸. ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ را $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ می‌نامیم. مطلوب است محاسبهٔ

$$y=\sin^۲(\alpha+\beta)+a\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+b\cos^۲(\alpha+\beta)$$

۱۰۹. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است اگر داشته باشیم:

$$\tan^۲ x + \cot^۲ x = a, \quad \tan^۴ x + \cot^۴ x = b$$

*۱۱۰. برای $a > ۱$ می‌دانیم:

$$\frac{a^۲ - ۱}{۱ + ۲a\cos\alpha + a^۲} = \frac{۱ + ۲a\cos\beta + a^۲}{a^۲ - ۱}$$

ثابت کنید: $\tan\frac{\alpha}{۲}\tan\frac{\beta}{۲} = \pm\frac{۱ + a}{۱ - a}$.

*۱۱۱. رابطه‌ای بین a و b و خط‌های مثلثاتی α و β پیدا کنید که به x بستگی نداشته باشد، به شرطی که داشته باشیم:

$$\cos(x - \alpha) = a, \quad \sin(x - \beta) = b$$

*۱۱۲. φ را از این برابری‌ها حذف کنید:

$$\frac{\cos(\alpha - ۳\varphi)}{\cos^۳\varphi} = \frac{\sin(\alpha - ۳\varphi)}{\sin^۳\varphi} = m$$

۱۱۳. a، b، c و d کمان‌هایی حاده و مثبت‌اند و می‌دانیم:

$$\tan a = \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \ \tan b = \frac{۱}{\sqrt{۱۵}}, \ \cos c = \sqrt{\frac{۲}{۳}}, \ \cos d = \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}$$

در این صورت، حاصل کسر $A = \frac{\sin(a + b)}{\sin(c + d)}$ را به‌دست آورید.

*۱۱۴. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$\tan\left(a - b + \frac{\pi}{۱۰}\right) + \tan\left(b - c + \frac{\pi}{۱۵}\right) + \tan\left(c - a + \frac{۵\pi}{۶}\right) =$$
$$= \tan\left(a - b + \frac{\pi}{۱۰}\right)\tan\left(b - c + \frac{\pi}{۱۵}\right)\tan\left(c - a + \frac{۵\pi}{۶}\right)$$

۱۱۵. اگر داشته باشیم:

$$\cos a\cos x-\sin a\cos b\sin x=\cos b$$

مقدار $\tan\frac{x}{۲}$ را به‌دست آورید.

۱۱۶. می‌دانیم $۰<x<\pi$. ثابت کنید:

$$\cot\frac{x}{۲}>۱+\cos x$$

۱۱۷. می‌دانیم $\tan x=a$. مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)$ را در حالت‌های مختلف محاسبه کنید.

۱۱۸. الف) اگر $۰\leq a\leq ۱$ و $۰\leq b\leq ۱$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\sqrt{a(۱-b)}+\sqrt{b(۱-a)}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

ب) اگر $۰\leq x\leq ۱$ و $۰\leq y\leq\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، ثابت کنید:

$$\frac{x+y}{۱-xy}\leq ۲+\sqrt{۳}$$

۱۱۹. $\cos ۳۶^\circ$ را محاسبه کنید.

*۱۲۰. به‌ازای چه مقداری از a، این معادله‌ها، ریشهٔ مشترک دارند:

$$۶\sin x=a(۷+\cos ۲x)$$
$$۳a\sin x-۸=a(۴+\sin ۳x)$$

*۱۲۱. می‌دانیم $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta=m$. مطلوب است محاسبهٔ

$$\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

*۱۲۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin^{3} x + \cos^{3} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x$$

*۱۲۳. α و β زاویه‌هایی حاده و مثبت‌اند. و می‌دانیم:

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha$$

ثابت کنید $\alpha < \beta$.

*۱۲۴. ثابت کنید، به شرط $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\frac{2}{\alpha}(1 - \cos \alpha) < (2 - \sqrt{2}) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha$$

۴. آنالیز ترکیبی

§۱. آشنایی

۱. آنالیز ترکیبی شاخه‌ای از ریاضیات است که دربارهٔ آرایش‌های گوناگون عضوهای یک یا چند مجموعه صحبت می‌کند. این مجموعه‌ها را باپایان و ناپیوسته در نظر می‌گیرند، یعنی تعداد عضوهای مجموعه و تعداد عضوهایی که باید از آن انتخاب شود، مشخص و محدود است و، روشن است، وقتی از تعداد عضوهای یک مجموعه گفت‌وگو می‌کنیم، به‌معنای آن است که عضوهای مجموعه از هم جدا هستند و می‌توان آن‌ها را شمرد. به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال ۱. *سه صندلی در سه ردیف پشت سر هم را برای سه دانش‌آموز که با هم دوست بودند و آن‌ها را A، B و C می‌نامیم، تعیین کردند. آن‌ها تصمیم گرفتند، رفتاری عادلانه با هم داشته باشند و هرکدام به نوبت، روی صندلی‌ها بنشینند، زیرا نزدیکی و دوری از تختهٔ‌سیاه، در توجه آن‌ها به درس آموزگار اثر داشت. این دانش‌آموزان، چند بار جاهای خود را عوض کنند تا دوباره به همان حالت نخست برسند؟*

حل. ردیف صندلی‌ها را، از جلو به عقب، ۱، ۲ و ۳ می‌نامیم. ببینیم، چند حالت وجود دارد که، در آن‌ها، A در ردیف ۱ نشسته باشد؟ روشن است که دو حالت: وقتی A در ردیف ۱ نشسته باشد یا B در ردیف ۲ و C در ردیف ۳ و یا C در ردیف ۲ و B در ردیف ۳ است. به همین ترتیب B در دو حالت روی صندلی ردیف ۱ قرار می‌گیرد و C هم در دو حالت در ردیف ۱ می‌نشیند. روی‌هم ۶ حالت.

این شش حالت را در این‌جا نشان داده‌ایم:

$$\begin{cases} A-۱, \\ B-۲, \\ C-۳, \end{cases} \begin{cases} A-۱, \\ C-۲, \\ B-۳, \end{cases} \begin{cases} B-۱, \\ A-۲, \\ C-۳, \end{cases}$$
$$\begin{cases} B-۱, \\ C-۲, \\ A-۳, \end{cases} \begin{cases} C-۱, \\ A-۲, \\ B-۳, \end{cases} \begin{cases} C-۱, \\ B-۲, \\ A-۳ \end{cases}$$

حالت دیگری وجود ندارد. این سه دانش‌آموز، تنها ۶ جور مختلف می‌توانند روی سه صندلی در ردیف‌های ۱، ۲ و ۳ بنشینند.

مثال ۲. *در کیسه‌ای چهار گلوله به چهار رنگ مختلف وجود دارد. سه گلوله، به تصادف از آن بیرون آورده‌ایم. چند حالت مختلف ممکن است پیش آید؟*

حل. اگر این مساله را، به صورت دیگری بیان کنیم، ساده‌تر به جواب می‌رسد:

چهار گلولهٔ A، B، C و D با چهار رنگ مختلف در کیسه‌ای وجود دارد. می‌خواهیم تنها یک گلوله در کیسه باقی بماند. چند حالت ممکن است؟

این مساله، همان مسالهٔ اصلی است، تفاوت آن با مسالهٔ اصلی در نوع برخورد ما با مساله است: به جای توجه به گلوله‌هایی که از کیسه بیرون

آورده‌ایم، به گلوله‌ای توجه می‌کنیم که در کیسه باقی مانده است. روشن است که تنها ۴ حالت ممکن است، زیرا در کیسه A یا B یا C و یا D می‌تواند باقی بماند. جواب مسالهٔ ما هم همین است: از ۴ گلولهٔ با رنگ‌های مختلف، به ۴ طریق می‌توان سه گلوله انتخاب کرد:

$$ABC, ABD, ACD, BCD$$

مثال ۳. در مثال ۲، فرض می‌کنیم، به ردیف سه گلوله‌هایی که از کیسه بیرون آورده‌ایم، علاقه‌مند باشیم. حالت ABC را در جواب مثال ۲ در نظر بگیرید. این جواب را می‌توان این‌طور تفسیر کرد: اول A، بعد B و سرانجام C را از کیسه بیرون آورده‌ایم. ولی همین سه گلوله A، B و C را می‌شد به ردیف‌های دیگری از کیسه بیرون آورد. این در واقع همان مثال ۱ است. در آن‌جا دیدیم A، B و C را به ۶ طریق می‌توان ردیف کرد:

$$\begin{matrix} ABC & BAC & CAB \\ ACB & BCA & CBA \end{matrix}$$

به این ترتیب، اگر به ردیف سه گلوله‌هایی که از کیسه بیرون آورده‌ایم، علاقه‌مند باشیم، روی‌هم به ۴×۶ یعنی ۲۴ حالت مختلف برخورد می‌کنیم.

این در واقع، اصلی را در آنالیز ترکیبی بیان می‌کند که، در ریاضیات، به آن **اصل ضرب یا اصل اساسی شمارش** گویند:

از بین چهار گلوله، با ۴ روش می‌توانیم سه گلوله را انتخاب کنیم؛ درضمن هریک از این انتخاب‌ها، خود متناظر با ۶ نوع انتخاب است. بنابراین روی‌هم به تعداد ۶×۴، یعنی ۲۴ نوع انتخاب وجود دارد.

مثال ۴. *چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک صفحه‌اند. با این چهار نقطه، چند مثلث مختلف می‌توان ساخت، به شرطی که*

الف) از بین چهار نقطه، هیچ سه‌نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند؛

ب) سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست باشند؟

حل. الف) مساله به طور کامل، شبیه مسالهٔ مثال ۲ است: با این چهار نقطه، می‌توان ۴ مثلث متفاوت ساخت: مثلث‌های ABC، ABD، ACD و BCD.

ب) در این حالت، با چهار نقطهٔ A، B، C و D، بیش از سه مثلث نمی‌توان ساخت، زیرا ABC مثلث نیست.

پاسخ. ABD، ACD و BCD.

۲. در این مساله‌ها و مساله‌های شبیه آن‌ها، دو ویژگی کلی وجود دارد:

۱) با مجموعه‌هایی سروکار داریم که عضوهای آن‌ها جدا از یکدیگرند.

۲) مجموعهٔ این عضوها، یک مجموعهٔ باپایان است. البته، در حالت‌های پیچیده‌تر، می‌توان به‌جای ویژگی دوم (یعنی متناهی بودن مجموعه) ویژگی شمارا بودن عضوهای مجموعه را در نظر گرفت، یعنی مجموعه‌ای که بتوان عضوهای آن را، با عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، در تناظر یک به یک قرار داد، ولی در آغاز آشنایی با آنالیز ترکیبی، همه‌جا با مجموعه‌های باپایان و متناهی سروکار داریم.

در مساله‌های مربوط به آنالیز ترکیبی، با دو عمل روبه‌رو هستیم: انتخاب برخی زیرمجموعه‌ها و، گاه، مرتب کردن عضوهای این زیرمجموعه‌ها [مجموعهٔ مرتب، به مجموعه‌ای گویند که ردیف عضوهای آن، برای ما اهمیت داشته باشد. مثلاً وقتی بخواهیم با سه رقم ۲ و ۴ و ۵، عددهای دورقمی با رقم‌های مختلف بسازیم، روشن است که ۵۲ با ۲۵ یا ۴۵ با ۵۴ فرق دارد].

مساله‌های مقدماتی آنالیز ترکیبی را، می‌توان به سه گونه کلی تقسیم کرد:

۱) مساله‌هایی که، در آن‌ها، باید تعداد جواب‌ها، یعنی در واقع، روش به‌دست آوردن زیرمجموعه‌های لازم و یا گونه‌های مختلف آرایش عضوهای یک مجموعه را پیدا کرد؛

۲) تحقیق دربارهٔ امکان عملی بودن آرایش لازم؛

۳) جدا کردن یک یا چند جواب از بین جواب‌های ممکن، به نحوی که با شرط‌های اضافی مساله، سازگار باشند.

با این‌که «آنالیز ترکیبی» به‌ظاهر با زمینهٔ بسیار محدودی، یعنی **انتخاب زیرمجموعه‌ها** سروکار دارد، شامل مساله‌های بسیار گوناگون و گاه دشواری است، زیرا نوع مجموعه‌ها بسیار گوناگون است؛ درضمن، انتخاب زیرمجموعه‌ها را می‌توان به صورت‌های بسیار متفاوتی در نظر گرفت و، به‌جز این‌ها، عضوهای هر مجموعه ویژگی‌های خاص خودشان را دارند.

*۳. عنصرهای نخستین آنالیز ترکیبی را، می‌توان برای نخستین بار، در کارهای «پاسکال» و «فرما» (سدهٔ هفدهم میلادی) پیدا کرد. «لایب‌نیتس» (نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم و آغاز سدهٔ هجدهم میلادی)، آن را به‌صورتی نظام‌یافته درآورد و در بحث‌ها و استدلال‌های منطقی از آن استفاده کرد. «یاکوب برنولی» (نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم)، آنالیز ترکیبی را در نظریهٔ احتمال به‌کار گرفت.

در پایان سدهٔ هفدهم میلادی، به‌تقریب همهٔ دستورها و رابطه‌های مربوط به آنالیز ترکیبی مقدماتی، یعنی آرایش‌ها، شناخته شده بود. در سدهٔ هجدهم، با طرح مساله‌هایی از جبر چندجمله‌ای‌ها، نظریهٔ عددها، دترمینان‌و نظریهٔ احتمال، انگیزه‌های تازه‌ای برای پیشرفت نظریهٔ آنالیز ترکیبی پیدا شد. ولی تلاش دربارهٔ تکمیل روش‌ها و گسترش مفهوم‌های این شاخهٔ ریاضی، که در سدهٔ هجدهم و آغاز سدهٔ نوزدهم به‌وسیلهٔ بسیاری از دانشمندان دنبال می‌شد، در سال‌های سدهٔ نوزدهم، کم‌وبیش قطع شد. ولی سدهٔ بیستم، شاهد گرایش

دوبارهٔ بسیاری از ریاضی‌دانان، به سمت پژوهش در آنالیز ترکیبی بود. و این بدان علت بود که شاخه‌های گوناگونی از دانش و صنعت، به تعمیم و تکامل قانون‌های آنالیز ترکیبی نیازمند بودند. از جملهٔ این رشته‌ها، به عنوان نمونه می‌توان از خود ریاضیات، برنامه‌ریزی خطی در اقتصاد، تجزیه و تحلیل آزمایش‌های علمی، کُدگذاری آگاهی‌ها، دستگاه‌های هدایت‌کننده، ماشین‌های حساب و غیره نام برد.

نظریهٔ آنالیز ترکیبی، در ریاضیات، به‌ویژه با نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریه گراف‌ها و نظریهٔ احتمال، رابطه‌ای تنگاتنگ دارد.

آنالیز ترکیبی را، به‌ویژه در بخش بررسی‌های امروزی آن، در زبان فارسی «ترکیبات» و «نظریهٔ ترکیبیاتی» نامیده‌اند که البته، به‌نظر من، نه از دید ظاهر واژه‌ای آن و نه از دید بیان آوایی، زیبا و دلنشین نیست. به این امید که دوست‌داران ریاضیات و زبان فارسی، بتوانند واژهٔ زیباتری برای آن بیندیشند.

§۲. جای‌گشت یا تبدیل

به مثال ۱ توجه کنید. در این مثال می‌خواستیم سه نفر را پشت سرهم بنشانیم و دیدیم که، به ۶ طریق می‌توان این کار را انجام داد. هریک از حالت‌های نشستن این ۳ نفر را یک **جای گشت** یا یک **تبدیل** از این سه نفر گویند.

وقتی با مجموعه‌ای سروکار داشته باشیم که دارای ۳ عضو باشد و بخواهیم عضوهای این مجموعه را مرتب کنیم، می‌توان ۶ مجموعهٔ مختلف با عضوهای مرتب به‌دست آورد. اگر عضوهای این مجموعه را با عددهای ۱، ۲ و ۳ نشان دهیم، این ۶ مجموعه به‌دست می‌آید:

$$\{۱, ۲, ۳\},\ \{۱, ۳, ۲\},\ \{۲, ۱, ۳\},$$
$$\{۲, ۳, ۱\},\ \{۳, ۱, ۲\},\ \{۳, ۲, ۱\}$$

این ۶ مجموعه، روی هم، مجموعهٔ جای‌گشت‌های سه عدد ۱، ۲ و ۳ را تشکیل می‌دهند.

تعداد جای‌گشت‌های چند عنصر را با حرف P نشان می‌دهند (حرف اول واژهٔ لاتینی Permutation به معنی جای‌گشت)، وقتی با سه عنصر سروکار داشته باشیم، تعداد جای‌گشت‌ها را $P_۳$ می‌نامند:

$$P_۳ = ۶$$

روشن است که $P_۱ = ۱$ و $P_۲ = ۲$: یک چیز را تنها به یک طریق می‌توان مرتب کرد و دو چیز را به دو طریق.

آیا می‌توان $P_۳$ را به‌یاری $P_۲$ به‌دست آورد؟ دو حرف a و b را در نظر می‌گیریم. این دو حرف را به دو طریق می‌توان ردیف کرد:

$$ab,\ ba$$

اکنون فرض کنید با سه حرف a، b و c سروکار داشته باشیم. حرف سوم c را در کجاها قرار دهیم تا همهٔ ردیف‌های سه حرف a و b و c، به یاری ab و ba به‌دست آیند. آرایش ab را در نظر می‌گیریم. حرف سوم c را می‌توان پیش از a یا بین a و b یا بعد از b قرار داد:

$$cab,\ acb,\ abc$$

یعنی از هر آرایش دوحرفی a و b، می‌توان ۳ آرایش سه‌حرفی a و b و c به‌دست آورد؛ یعنی تعداد جای‌گشت‌های سه حرف، برابر است با حاصل‌ضرب تعداد جای‌گشت‌های دو حرف در ۳:

$$P_۳ = P_۲ \times ۳ = ۲ \times ۳$$

با همین استدلال روشن می‌شود که برای محاسبهٔ تعداد جای‌گشت‌های چهار حرف، باید حاصل‌ضرب تعداد جای‌گشت‌های سه حرف را در ۴ پیدا کرد:

$$P_۴ = P_۳ \times ۴ = ۲ \times ۳ \times ۴$$

در واقع، اگر یکی از جای‌گشت‌های سه حرف a و b و c، مثلاً abc را در نظر بگیریم، حرف چهارم d را در یکی از چهار محل ممکن (پیش از a، بین a و b، بین b و c و بعد از c) می‌توان قرار داد.

این استدلال را تا هرجا که لازم باشد، می‌توان ادامه داد:

$$P_۵ = P_۴ \times ۵ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵,$$
$$P_۶ = P_۵ \times ۶ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n = ۲ \times ۳ \times ۴ \times \ldots \times (n-۱) \times n$$

می‌دانیم، در ریاضیات، برای ضرب عددهای طبیعی از ۱ تا n، از نماد ! استفاده می‌کنند و به آن «فاکتوریل» می‌گویند: $n!$ را می‌خوانند «فاکتوریل n» یا «n فاکتوریل». بنابراین

$$P_۱ = ۱!,\ P_۲ = ۲!,\ P_۳ = ۳!,\ \ldots,\ P_n = n!$$

مثال ۵. ۷ *جوان دوست به رستوران پدر یکی از دوستان دیگر خود رفتند و توقع داشتند پدر دوستشان آن‌ها را به شام میهمان کند. ولی صاحب رستوران به آن‌ها پیشنهاد کرد: هر هفته یک‌بار به رستوران او بروند و با هم شام بخورند. صاحب رستوران همیشه در جای خاص خودش می‌نشیند و تغییر جا نمی‌دهد. ولی ۷ نفر دوست باید هر بار جای خود را عوض کنند.*

این دوستان باید هر بار پول شام صاحب رستوران را بپردازند تا زمانی که، دوباره، هر کسی در جایی بنشیند که در نخستین روزِ مراجعه به رستوران نشسته بود. از آن شب به بعد، صاحب رستوران، یعنی پدر دوستشان، هر هفته هر ۷ نفر را مهمان خواهد کرد. این دوستان، بعد از چه مدتی به نخستین شام مجانی می‌رسند؟

حل. برای این‌که بدانیم، این ۷ نفر دوست، چند جور می‌توانند پهلوی هم بنشینند، باید تعداد جای‌گشت‌های عضوهای یک مجموعهٔ ۷ عضوی، یعنی $P_۷$ را پیدا کنیم:

$$P_۷ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ = ۵۰۴۰$$

۵۰۴۰ هفته لازم است تا این ۷ دوست، در همهٔ حالت‌های ممکن، پشت میز رستوران نشسته باشند. اگر هر سال را به تقریب ۵۲ هفته به حساب آوریم، این مدت، برابر زمانی بیشتر از ۹۶ سال می‌شود.

اگر محاسبه را دقیق‌تر انجام دهیم، ۹۶ سال و ۴ ماه به‌دست می‌آید. یعنی، اگر این دوستان دست‌کم ۱۱۵ سال عمر کنند و اگر در آن زمان پدر دوستشان زنده باشد، می‌توانند از آن به بعد، هفته‌ای یک بار مهمان صاحب رستوران باشند.

§۳. ترتیب یا آرایش

۱. از یک مثال آغاز می‌کنیم.

مثال ۶. *چهار نفر، که آن‌ها را A، B، C و D می‌نامیم در مسابقهٔ شطرنج شرکت دارند. تنها به نفر اول و نفر دوم جایزه می‌دهند؛ درضمن، جایزهٔ اول با جایزهٔ نفر دوم فرق دارد. چند حالت مختلف ممکن است پیش آید؟*

حل. نفر اول مسابقه، می‌تواند یکی از چهار نفر (A یا B یا C یا D) باشد. بنابراین، برای برندهٔ جایزهٔ اول، ۴ حالت ممکن است. وقتی نفر اول معلوم باشد، هریک از سه نفر دیگر، ممکن است جایزهٔ دوم را ببرد. مثلاً اگر A جایزهٔ اول را برده باشد، جایزه دوم ممکن است به B یا به C و یا به D برسد. به این ترتیب، روی‌هم به تعداد ۳ × ۴ یعنی به ۱۲ حالت مختلف، برای برندگان جایزهٔ اول و جایزهٔ دوم می‌رسیم. این ۱۲ حالت ممکن، چنین‌اند (حرف سمت چپ معرف نفر اول و حرف سمت راست، معرف نفر دوم است):

$$\begin{matrix} AB & AC & AD \\ BA & BC & BD \\ CA & CB & CD \\ DA & DB & DC \end{matrix}$$

این ۱۲ حالت، را انتخاب **ترتیب‌های دوتایی** از بین چهار نفر A، B، C و D می‌گویند.

فرض کنید، n عنصر در اختیار داشته باشیم و از بین آن‌ها، m عنصر ($m \leq n$) را انتخاب کنیم و در یک سطر، از چپ به راست، پشت سرهم بچینیم. چنین تنظیمی از چیزها را «**انتخاب مرتب**» می‌نامند. همچنین، می‌توان آن را **زنجیره‌ای** از چیزها نامید. به هریک از این زنجیره‌ها یا انتخاب‌های مرتب، یک ترتیب mتایی از n چیز گفته می‌شود.

توجه کنید: دو ترتیب (یا دو زنجیره، یا دو انتخاب مرتب)، یا در نوع عنصرهای خود و یا در ردیف قرار گرفتن آن‌ها با هم فرق دارند.

بنابراین، ترتیب یا آرایش را می‌توان، به زبان مجموعه‌ها، این‌طور تعریف کرد:

انتخاب زیرمجموعه‌های mعضوی از یک مجموعهٔ nعضوی را، ترتیب‌های mتایی از n عنصر می‌نامند. در ترتیب، ردیف عضوهای زیر مجموعه، اهمیت دارد: AB و BA دو ترتیب مختلف‌اند.

تعداد ترتیب‌ها یا آرایش‌های mتایی از n عنصر را، با نماد A_n^m نشان می‌دهند. (A، حرف اول واژه Arangemen به معنی آرایش است). در مثال ۶ داریم:

$$A_۴^۲ = ۱۲$$

۲. محاسبهٔ تعداد ترتیب‌ها. با n چیز چند ترتیب mتایی می‌توان درست کرد؟ به زبان مجموعه‌ها، می‌توان این‌طور پرسید: «برای مجموعه‌ای که n عضو دارد، چند زیرمجموعهٔ مرتب m عضوی وجود دارد؟»

روشن است که $A_n^۱ = n$: به n طریق می‌توان یک چیز را از بین n چیز انتخاب کرد.

به حالت کلی A_n^m می‌پردازیم. n حلقه مختلف در نظر بگیرید و فرض کنید بخواهیم، زنجیره‌ای شامل m حلقه $(m \leq n)$ از بین این n حلقه بسازیم. برای انتخاب حلقهٔ اول، n انتخاب امکان دارد (انتخاب یک حلقه از بین n حلقه). حلقهٔ دوم را باید از بین $(n - ۱)$ حلقهٔ باقی‌مانده انتخاب کرد؛ یعنی برای انتخاب حلقهٔ دوم، $(n - ۱)$ امکان وجود دارد. به این ترتیب، اگر بخواهیم از بین n حلقه، یک زنجیرهٔ دوحلقه‌ای انتخاب کنیم، روی‌هم $n(n - ۱)$ امکان وجود دارد:

$$A_n^۲ = n(n - ۱)$$

حلقهٔ سوم را باید از بین $(n - ۲)$ حلقهٔ باقی‌مانده انتخاب کرد: $(n - ۲)$ امکان؛ یعنی برای انتخاب یک زنجیره ۳ حلقه‌ای از یک مجموعهٔ شامل n

حلقه، $n(n-۱)(n-۲)$ امکان وجود دارد:

$$A_n^۳ = n(n-۱)(n-۲)$$

اگر استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم، به‌دست می‌آید:

$$A_n^۴ = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$$

و به‌طور کلی، برای تشکیل زنجیرهٔ m حلقه‌ای از بین n حلقه، به این دستور می‌رسیم:

$$A_n^m = n(n-۱)(n-۲)\dots[n-(m-۱)]$$

و یا به‌صورت ساده‌تر

$$A_n^m = n(n-۱)(n-۲)\dots(n-m+۱) \qquad (۱)$$

اگر در برابری (۱)، برای عبارت سمت راست، مخرج ۱ در نظر بگیریم و صورت و مخرج را در $(n-m)!$ ضرب کنیم، به این دستور می‌رسیم:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (۲)$$

* این دستور، برای $m = ۰$، به‌صورت $A_n^۰ = ۱$ درمی‌آید. این برابری درست است. مجموعهٔ تهی، تنها مجموعه‌ای است که زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواهی است. اگر قرار بگذاریم که مجموعهٔ تهی را، تنها به یک طریق می‌توان مرتب کرد، آن‌وقت برابری $A_n^۰ = ۱$ معنا پیدا می‌کند. دستورهای (۱) و (۲)، برای هر دو عدد درست و دلخواه n و m، به‌شرط $۰ \leq m \leq n$ درست است.

دیدیم، اگر بخواهیم تعداد ترتیب‌های mتایی را در یک مجموعهٔ nعضوی به‌دست آوریم، باید از دستور $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ استفاده کنیم. ولی این، به‌شرطی است که در ترتیب‌ها، عضوی تکراری وجود نداشته باشد.

فرض کنید، n گلوله با n رنگ مختلف در کیسه‌ای باشد و ما بخواهیم m گلوله از آن خارج کنیم. برای نخستین گلوله‌ای که از کیسه بیرون می‌آوریم، n حالت مختلف وجود دارد، برای گلولهٔ دوم، که از بین $n-۱$ گلولهٔ باقی‌مانده انتخاب می‌شود، $n-۱$ حالت،برای گلولهٔ سوم $n-۲$ حالت و غیره وجود دارد. این وضع، به این شرط است که، وقتی گلوله‌ای را از کیسه بیرون می‌آوریم، آن را کنار بگذاریم و دوباره به کیسه برنگردانیم. در این وضع، هر ترتیبی که به‌دست می‌آید، شامل m گلوله با m رنگ مختلف است و در هیچ‌کدام از ترتیب‌ها، دو یا چند گلولهٔ هم‌رنگ پیدا نمی‌شود.

اکنون فرض کنید، وقتی نخستین گلوله را از کیسه بیرون آوردیم (n انتخاب ممکن)، دوباره گلوله را به کیسه برگردانیم و گلولهٔ دوم را، باز هم از بین n گلوله انتخاب کنیم، یعنی برای انتخاب گلولهٔ دوم هم، n حالت ممکن در نظر بگیریم؛ به‌همین ترتیب، برای انتخاب گلوله‌های بعدی. در این صورت، برای انتخاب هر گلوله، n حالت و برای انتخاب m گلوله، n^m حالت پیدا می‌شود.

اگر انتخاب ترتیب‌ها، بتواند همراه با تکرار یک یا چند جمله باشد، آن را، **ترتیب با تکرار** گویند. *تعداد ترتیب‌های با تکرار mتایی از بین n عنصر، برابر است با n^m.*

به عنوان نمونه، در مثال ۶ دیدیم، تعداد ترتیب‌های دوتایی از یک مجموعهٔ چهارعضوی، برابر است با $A_4^2 = ۱۲$. اکنون اگر بخواهیم، ترتیب‌های با تکرار را هم، به این ۱۲ ترتیب اضافه کنیم، چهار ترتیب جدید

به‌دست می‌آید:

$$AA, BB, CC, DD$$

یعنی روی‌هم ۱۶ ترتیب؛ درضمن: $۱۶ = ۲^۴$.

§۴. ترکیب

۱. با یک مثال آغاز می‌کنیم.

مثال ۷. *۶ نقطه A، B، C، D، E و F روی یک صفحه‌اند، به‌نحوی که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نیستند. با این شش نقطه، چند چهارضلعی مختلف می‌توان ساخت؟*

حل. وقتی با چهار نقطه از شش نقطه، یک چهارضلعی بسازیم، با دو نقطهٔ باقی‌مانده می‌توان یک پاره‌خط راست رسم کرد (پاره‌خط راستی که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند). بنابراین، می‌توان مساله را اندکی تغییر داد و به این صورت درآورد:

۶ نقطه A، B، C، D، E و F، روی یک صفحه‌اند. با وصل دوبه‌دوی آن‌ها، چند پاره‌خط راست به‌دست می‌آید؟

از نقطهٔ A می‌توان به هریک از پنج نقطهٔ دیگر وصل کرد و ۵ پاره‌خط راست به‌دست آورد. از B تنها به ۴ نقطهٔ دیگر می‌توان وصل کرد تا پاره‌خط‌های جدید پیدا شود، زیرا اگر از B به A وصل کنیم، پاره‌خط راست BA به‌دست می‌آید که با پاره‌خط راست AB (که پیش از این به‌دست آورده‌ایم) فرقی ندارد. به همین ترتیب، از نقطه C، به سه نقطه (غیر از نقطه‌های A و B) باید وصل کرد تا پاره‌خط‌های راست تازه به‌دست آید و غیره. به این ترتیب، تعداد همهٔ پاره‌خط‌های راستی که با این ۶ نقطه می‌توان ساخت برابر است با

$$۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۵$$

پاسخ مثال ۷ هم، همین است: اگر بین ۶ نقطهٔ واقع بر صفحه، هیچ سه‌نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند، می‌توان ۱۵ چهارضلعی مختلف ساخت.

مسالهٔ مثال ۷ را می‌توان، به‌صورت کلی و به این ترتیب در نظر گرفت:

فرض می‌کنیم n عنصر مختلف داشته باشیم و بخواهیم از بین آن‌ها m عنصر را انتخاب کنیم. به چند طریق ممکن است؟ در این‌جا ردیف انتخاب عنصرها، اهمیتی ندارد؛ مثل مثال ۷، که برای ما، پاره‌خط راست BA با پاره‌خط راست AB تفاوتی نداشت.

به زبان مجموعه‌ها، می‌توان مساله را، این‌طور طرح کرد:

در یک مجموعهٔ nعضوی، چند زیرمجموعهٔ m عضوی وجود دارد؟

انتخاب m عنصر از n عنصر را، بدون این‌که به ترتیب آن‌ها توجه داشته باشیم، **ترکیب m به m از n عنصر** یا **ترکیب mتایی از n عنصر** گویند.

تعداد ترکیب‌های m به m را، که از n عنصر به‌دست می‌آید با C_n^m نشان می‌دهند (C، حرف اول واژهٔ Combination به معنی ترکیب است). در برخی کتاب‌ها، از نماد $\binom{n}{m}$ یا $C(n,m)$، برای نشان دادن تعداد ترکیب‌های m به m از n عنصر، استفاده کرده‌اند. در این کتاب و کتاب‌های بعدی، از نماد C_n^m استفاده کرده‌ایم. درضمن، در مثال ۷ دیدیم:

$$C_۶^۴ = C_۶^۲ = ۱۵$$

محاسبهٔ تعداد ترکیب‌ها

مفهوم ترکیب، با مفهوم‌های تبدیل (جای‌گشت) و ترتیب (آرایش) بستگی نزدیک دارد. برای تعداد ترتیب‌های m عنصر از بین n عنصر، به‌دست

آوردیم:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

ولی در ترتیب، ردیف عنصرها برای ما اهمیت داشت و مثلاً ABC با ACB یا BCA و غیره متفاوت بود؛ در حالی که در ترکیب، ردیف عنصرها اهمیت ندارد. می‌دانیم، برای m عنصر، اگر به ردیف آن‌ها اهمیت بدهیم، $m!$ حالت وجود دارد (جای‌گشت m عنصر). بنابراین

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (۳)$$

باتوجه به دستور (۳)، و یا باتوجه به تعریف مفهوم ترکیب، این نتیجه‌ها روشن است:

۱) $C_n^{1} = n$: از بین n چیز، به n طریق می‌توان یک چیز انتخاب کرد.

۲) $C_n^n = 1$: از بین n چیز به یک طریق می‌توان n چیز انتخاب کرد.

۳) $C_n^m = C_n^{n-m}$: وقتی از بین n چیز، بخواهیم m چیز انتخاب کنیم، مثل این است که بخواهیم از بین n چیز، $n-m$ چیز را کنار بگذاریم.

مثال ۸. *در شرکتی که ۸ کارمند مرد و ۶ کارمند زن دارد، می‌خواهند گروهی شامل ۳ کارمند مرد و ۲ کارمند زن را به ماموریت بفرستند. به چند طریق ممکن است؟*

حل. از بین ۸ کارمند مرد، به C_8^3 طریق می‌توان ۳ نفر را انتخاب کرد و

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

از بین ۶ کارمند زن، به C_6^2 طریق می‌توان دو نفر را انتخاب کرد و

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

هر حالت انتخاب اول را، می‌توان با هر حالت انتخاب دوم در نظر گرفت. بنابراین، اگر تعداد کل حالت‌های مختلف را N بنامیم:

$$N = C_{۸}^{۳} \times C_{۶}^{۲} = ۵۶ \times ۱۵ = ۸۴۰$$

مثال ۹. *در کارخانه‌ای که لامپ تولید می‌کنند، در هر بسته ۱۰ لامپ قرار می‌دهند. در بخش بازرسی فنی، از هر بسته ۵ لامپ را «به تصادف» آزمایش می‌کنند. اگر هر ۵ لامپ سالم بود، بسته ۱۰ لامپی را به بازار می‌فرستند. ولی اگر حتا یکی از ۵ لامپ ناسالم باشد، بسته را برای بازبینی کامل نگه می‌دارند. چه احتمالی وجود دارد، متوجه بسته‌ای که شامل ۵ لامپ ناسالم است نشوند، یعنی هر پنج لامپی که به تصادف انتخاب کرده‌اند، سالم و هر پنج لامپ باقی‌مانده ناسالم باشند؟*

حل. انتخاب ۵ لامپ از بین ۱۰ لامپ، به $C_{۱۰}^{۵}$ طریق ممکن است و

$$C_{۱۰}^{۵} = \frac{۱۰!}{۵!۵!} = ۲۵۲$$

فرض کنیم با بسته‌ای سروکار داشته باشیم که ۵ لامپ سالم و ۵ لامپ ناسالم داشته باشد. یکی از این ۲۵۲ حالت، همان حالتی است که، هر ۵ لامپ انتخابی، سالم باشند، یعنی درست همان ۵ لامپ سالم بازبینی شده‌باشد و بسته‌ای که دارای ۵ لامپ ناسالم است، به بازار برود.

به این ترتیب، احتمال چنین پیش‌آمدی، برابر است با

$$P = \frac{۱}{C_{۱۰}^{۵}} = \frac{۱}{۲۵۲}$$

از هر ۲۵۲ بسته‌ای که به بازار می‌رود، احتمال دارد یکی از آن‌ها شامل ۵ لامپ ناسالم باشد.

مثال ۱۰. چهار رقم ۱ و شش رقم ۲ را، به چند طریق می‌توان ردیف کرد؟

حل. این مساله از این جهت جالب است که، با آنکه صحبت بر سر ردیف عنصرها است، برای حل آن باید از «ترکیب» استفاده کنیم.

در واقع، در ردیف ده‌رقمی که از چهار رقم ۱ و شش رقم ۲ می‌نویسیم، کافی است تنها جای رقم‌های ۱ را معین کنیم؛ در این صورت، جای رقم‌های ۲، به خودی خود، مغین می‌شود. جای ۴ رقم را، در بین ۱۰ رقم، به $C_{۱۰}^{۴}$ طریق می‌توان انتخاب کرد و

$$C_{۱۰}^{۴} = \frac{۱۰!}{۴!۶!} = ۲۱۰$$

می‌توانستیم، به‌جای رقم‌های ۱، جای رقم‌های ۲ را معین کنیم که، به $C_{۱۰}^{۶}$ طریق ممکن است. درضمن می‌دانیم:

$$C_{۱۰}^{۶} = C_{۱۰}^{۴} = ۲۱۰$$

تمرین‌ها

۱۲۵. به‌شرط $k < n$، این مجموع را محاسبه کنید:

$$A = k! + k \cdot k! + (k + ۱)(k + ۱)! + \ldots + (n - ۱)(n - ۱)!$$

***۱۲۶.** n عددی طبیعی است. این مجموع را محاسبه کنید.

$$B = \frac{۳}{۱! + ۲! + ۳!} + \frac{۴}{۲! + ۳! + ۴!} + \ldots + \\ + \frac{n + ۲}{n! + (n + ۱)! + (n + ۲)!}$$

۱۲۷. m عددی است طبیعی که بر ۵ بخش‌پذیر نیست. عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که برابری $n! = m \times 10^{19}$ ممکن باشد.

۱۲۸. با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، همهٔ عددهای پنج‌رقمی ممکن را، بدون تکرار رقم‌ها، ساخته‌ایم.

الف) چند عدد با رقم ۳ آغاز نمی‌شود؟

ب) چند عدد با رقم ۵۴ آغاز نمی‌شود؟

۱۲۹. الف) تعداد تبدیل‌های همهٔ عضوهای یک مجموعه، بیشتر از ۱۰۰۰ شده است. این مجموعه، دست‌کم چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

ب) اگر تعداد تبدیل‌های عضوهای یک مجموعه، کمتر از ۵۰۰ باشد، این مجموعه حداکثر چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱۳۰. سه زوج زن و شوهر، در یک رستوران، پشت یک میز نشسته‌اند (هر سمت میز، ۳ نفر). این ۶ نفر، به چند طریق می‌توانند بنشینند که همواره، هر زن روبه‌روی شوهر خود باشد؟

۱۳۱. با پنج رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، همهٔ عددهای پنج‌رقمی را نوشته‌ایم، البته بدون تکرار یک یا چند رقم. چند عدد پنج‌رقمی به‌دست می‌آید؟

۱۳۲. ثابت کنید: $A_n^n = A_n^{n-1} = n!$.

۱۳۳. از معادلهٔ $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$، مقدار n را پیدا کنید.

۱۳۴. نمودار تابع‌هایی را رسم کنید که ضابطهٔ آن‌ها داده شده است (دامنه تابع‌ها را $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ بگیرید):

الف) $y = P_x$؛ ب) $y = A_4^x$؛ ج) $y = C_4^x$.

۱۳۵. ثابت کنید:

$$1)\ C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m;$$

$$2)\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

۱۳۶. از بین ۱۰ کتاب و ۸ مجله، می‌خواهیم یک بستهٔ پستی شامل ۳ کتاب و ۵ مجله درست کنیم، به چند طریق ممکن است؟

۱۳۷. این معادله را حل کنید:

$$C_x^{x-۱} + C_x^{x-۲} + \ldots + C_x^{x-۱۰} = ۱۰۲۳$$

۱۳۸. با سه گلولهٔ سیاه، یک گلوله سفید، یک گلولهٔ آبی و یک گلولهٔ قرمز، چند ردیف مختلف چهارتایی می‌توان درست کرد؟

۱۳۹. چند عدد چهاررقمی وجود دارد که، در هرکدام آن‌ها، دو رقم زوج و دو رقم فرد وجود داشته باشد؟

۱۴۰. چند عدد شش‌رقمی وجود دارد که، مجموع رقم‌های هریک از آن‌ها، عددی فرد باشد؟

۱۴۱. p مهرهٔ سفید و q مهرهٔ سیاه $(p \geq q)$ در اختیار داریم. همهٔ مهره‌ها را، به چند طریق می‌توان در یک ردیف به‌نحوی قرار داد که، هیچ دو مهرهٔ سیاهی، در کنار هم نباشند؟

۱۴۲. در یک ۱۰ضلعی کوژ، می‌دانیم هیچ سه قطری از یک نقطه نمی‌گذرند. قطرهای این ده‌ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱۴۳. هر ضلع مربع را به ۵ بخش تقسیم کرده‌ایم (لازم نیست، این بخش‌ها، با هم برابر باشند). چند مثلث می‌توان ساخت که، راس‌های آن‌ها، در این نقطه‌های تقسیم باشند؟

۱۴۴. می‌خواهیم از بین چهار زوج زن و شوهر، گروهی شامل سه نفر برای بحث دربارهٔ موضوعی تشکیل دهیم. به چند طریق ممکن است، به شرطی که

الف) در گروه، سه نفر از هشت نفر به دلخواه انتخاب شوند؟

ب) گروه شامل دو زن و یک مرد باشد؛

ج) در گروه، دو عضو یک خانواده وجود نداشته باشند؟

۱۴۵. بین ده نمونه از یک کالا، سه نمونه ناقص است. شش نمونه از این کالا را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال این‌که درست دو نمونه از این شش نمونهٔ انتخابی ناقص باشد، چقدر است؟

۱۴۶. ۳۶ مهره به سه رنگ در اختیار داریم: از هر رنگ ۱۲ مهره. ۱۲ مهرهٔ هر رنگ را، از ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. اگر به تصادف سه مهره از ۳۶ مهره را انتخاب کنیم، با چه احتمالی، یکی از این سه مهره، و تنها همان یکی، شمارهٔ ۱ را دارد؟

۱۴۷. از بین ۱۰ گلولهٔ هم‌رنگ و هم‌اندازه، با شماره‌های از ۱ تا ۱۰، شش گلوله به تصادف انتخاب کرده‌ایم. چه احتمالی وجود دارد که، در بین این شش گلوله: الف) شمارهٔ ۱ وجود داشته باشد؛ ب) شماره‌های ۱ و ۲ وجود داشته باشند؟

۱۴۸. در جعبه‌ای ۲ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ قرمز وجود دارد. ۲ گلوله به تصادف از آن بیرون آورده‌ایم. چه احتمالی وجود دارد که، از این دو گلوله: الف) تنها یکی قرمز باشد؛ ب) هردو قرمز باشند؛ ج) دست‌کم یکی قرمز باشد؟

۱۴۹. a_1، a_2، a_3 و a_4، چهار پیش‌آمد هستند که، هرکدام از آن‌ها، می‌تواند رخ بدهد و می‌تواند رخ ندهد. اگر چهار پیش‌آمد را با هم در نظر بگیریم، چند پیش‌آمدِ ممکن وجود دارد؟ آن‌ها را نام ببرید.

۱۵۰. در ظرفی ۱۰ گلولهٔ سفید و ۵ گلولهٔ سیاه وجود دارد. ۳ گلوله، به تصادف، از ظرف پیرون می‌آوریم. احتمال چه ترکیبی از رنگ‌ها، در این سه گلوله، بیشتر است؟

۵. بردار و محاسبه برداری

§۱. ورود به موضوع

۱. ریاضیات در رابطه با زندگی و عمل. گالیله می‌گفت: ریاضیات، زبان طبیعت است و برای شناختن طبیعت و آشنایی با قانون‌های حاکم بر طبیعت، باید این زبان، یعنی ریاضیات را فرا گرفت. به‌جز این، باید گفت: ریاضیات، درضمن، زبان زندگی است؛ بدون ریاضیات، نمی‌توان زندگی را شناخت و نمی‌توان بر دشواری‌های آن غلبه کرد.

ولی طبیعت و زندگی، پیچیدگی‌های بسیار دارند و به سادگی نمی‌توان آن‌ها را شناخت. زندگی روز به روز بغرنج‌تر می‌شود و، همراه با آن، برای تحلیل و توضیح جنبه‌های مختلف زندگی (از اقتصاد و صنعت گرفته تا پزشکی و جامعه‌شناسی و روان‌شناسی)، به ریاضیاتی پیچیده‌تر، پیش‌رفته‌تر و دقیق‌تر نیاز دارد. به همین ترتیب، هرچه در ژرفای قانون‌مندی‌های حاکم بر طبیعت بیشتر فرو رویم، خود را نیازمند به ابزارهای تازه‌ای در ریاضیات می‌بینیم. پیچ‌ها و مهره‌های طبیعت، با یک آچار باز نمی‌شوند و، گاه، برای درک طبیعت، ناچاریم ابزار تازه و تازه‌تری بسازیم.

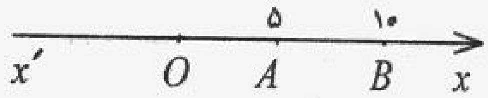
ریاضیات هرگز کهنه نمی‌شود، کشف‌های تازه و ابزارهای تازه در ریاضیات، به‌معنای دور ریختن کشف‌های قبلی و کنار گذاشتن ابزارهای پیشین نیست. پیشرفت ریاضیات، به معنای نابودی ریاضیات کهن و جانشینی اندیشه‌های نو نیست، بلکه به این معنا است که لباس تازه‌ای بر قامت ریاضیات بدوزیم، اندیشه‌های بیشین را سوهان بزنیم، نیازهای تازه را (چه برای حل دشواری‌های زندگی و چه برای شناخت بهتر طبیعت)، با دقیق‌تر کردن ابزار کار خود، یعنی ریاضیات، برطرف کنیم.

ساده‌ترین عمل ریاضی، جمع است می‌گوییم

$$۵ + ۵ = ۱۰$$

این، عملی درست است و هرگز از بین نمی‌رود. ولی اگر از کاربرد آن آگاهی نداشته باشیم، ممکن است دچار اشتباه شویم. برای به‌کار گرفتن هر عمل و هر قانون ریاضی، باید از جا و میزان کاربرد آن آگاه بود. وقتی یک شیمی‌دان، ۵ لیتر آب را با ۵ لیتر الکل مخلوط می‌کند، به‌جای ۱۰ لیتر، $۹\frac{۱}{۲}$ لیتر آب و الکل به‌دست می‌آورد. این نتیجه، به معنای نقض قانون ریاضی نیست، بلکه به معنای پیچیدگی قانون‌های حاکم بر طبیعت است، به‌معنای آن است که باید بدانیم، برای عمل، در کجا باید از این ابزار ریاضی استفاده کرد و در کجا از ابزاری دیگر. ریاضیات، مثل یک موجود زنده عمل می‌کند: در حرکت است، خود را تصحیح می‌کند، در هرجا ابزار ویژهٔ آن را به کار می‌برد و هرگز قانون‌های اصلی خود را نقض نمی‌کند. تنها همیشه هشدار می‌دهد که، از هر دستوری یا فرمولی، در جای خودش استفاده کنید، وگرنه دچار اشتباه می‌شوید.

۲. **عمل‌کرد نیرو و ریاضیات.** به همان عمل سادهٔ جمع برگردیم. فرض



شکل ۱۲

کنید، دو نفر که نیرویی برابر دارند، بخواهند جعبه‌ای را روی زمین مسطح، با صرف نیروی خود حرکت دهند. فرض کنید، هریک از این دو نفر، بتوانند در دو دقیقه، جعبه را به اندازهٔ ۵ متر جابه‌جا کند. اگر اکنون، دو نفر با هم عمل کنند، چه پیش می‌آید؟

آیا همیشه و در هر حال، می‌توانند در دو دقیقه، جعبه را ۱۰ متر جابه‌جا کنند؟ روشن است که نتیجهٔ صرف نیروی این دو نفر، بستگی به این دارد که چگونه و در چه جهتی به جعبه فشار وارد کنند. فرض کنیم، دو طناب به جعبه بسته باشند و، هر نفر، با کشیدن طناب، جعبه را به جلو ببرد. جعبه را به صورت یک نقطه و با حرف O نشان می‌دهیم.

۱) فرض کنیم، دو نفر، جعبه را در یک راستا و به یک سمت بکشند. می‌توان کار دو نفر را از هم جدا کرد، به این ترتیب که در آغاز، یک نفر جعبه را روی محور $x'x$ و در جهت مثبت دو دقیقه حرکت دهد تا جعبه به نقطه A با طول برابر ۵ برسد؛ سپس نفر دوم، کار را ادامه دهد و جعبه را روی همان محور $x'x$ و در همان جهت مثبت، دو دقیقهٔ دیگر به جلو ببرد. جعبه به نقطهٔ B با طول برابر ۱۰ می‌رسد (شکل ۱۲). در این‌جا همان برابری ۱۰ = ۵ + ۵ به‌دست می‌آید. می‌توان نوشت:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

پاره‌خط‌های راست کوچکی را که روی OA، AB و OB گذاشته‌ایم، به این معنا بگیرید که مثلاً در $\overline{OA}$، حرکت از O به A است. با این شکل

نمادین نوشتن، $\overline{AB}$ با $\overline{BA}$ فرق دارد: $\overline{AB}$، یعنی از A به B، و $\overline{BA}$ یعنی از B به A. به زبان دیگر، اگر به مفهوم محور توجه کنیم، $\overline{AB}$ به‌معنای ۵+ است (زیرا از A به B، در جهت مثبت محور است)، ولی $\overline{BA}$ به معنای ۵− (زیرا حرکت از B به سمت A، در جهت منفی است).

به این ترتیب، وقتی با پاره‌خط‌های راستی که بر یک محور قرار دارند، سروکار داشته باشیم، با گذاشتن نماد «ـ» در بالای آن‌ها، در واقع، علامت عددی را مشخص کرده‌ایم که معرف طول و جهت پاره‌خط راست است. به همین جهت، مثلاً $\overline{AB}$ را می‌خوانند: «مقدار جبری پاره‌خط راست AB».

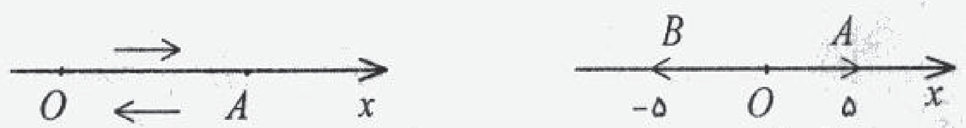
اگر هدف بیان طول پاره‌خط راست AB (بدون توجه به جهت آن) باشد، می‌نویسند $|AB|$ (بخوانید طول پاره‌خط راست AB) و اگر منظور، بیان مقدار جبری پاره‌خط راست AB باشد، می‌نویسند $\overline{AB}$. بنابراین، اگر $|AB| = ۵$ و جهت مثبت محور از A به سمت B باشد، آن‌گاه

$$\overline{AB} = ۵,\ \overline{BA} = -۵$$

و درنتیجه: $\overline{AB} + \overline{BA} = ۰$.

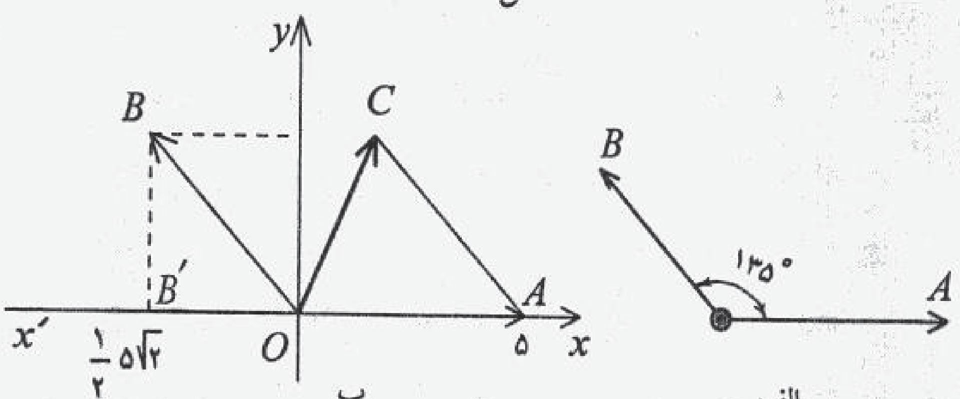
۲) اکنون فرض کنید، دو نفری که طناب را می‌کشند، در روی محور $x'x$، یکی به سمت راست و دیگری به سمت چپ حرکت کند (شکل ۱۳، الف). روشن است که جعبه، در نقطهٔ O باقی می‌ماند و از آن‌جا تکان نمی‌خورد. اگر در این‌جا هم، کار دو نفر را از هم جدا کنیم، مثل این است که، نفر اول جعبه را از O به A ببرد؛ سپس نفر دوم، جعبه را از A به O برگرداند. نتیجهٔ دو عمل این است که، جعبه، در همان نقطهٔ نخستین خود، یعنی O، قرار می‌گیرد. در واقع، برای شکل ۱۳، الف

$$\overline{OA} + \overline{OB} = (+۵) + (-۵) = ۰$$



ب الف

شکل ۱۳



ب الف

شکل ۱۴

و برای شکل ۱۳، ب:

$$\overline{OA} + \overline{AO} = ۰$$

ابزار ریاضی تازه، برای این عمل، به کار گرفتن مفهوم محور و، همچنین، جدا کردن عددهای مثبت و منفی از یکدیگر است.

۳) اگر فرض کنیم، نیروهای برابری که به جعبه وارد می‌شوند، در یک راستا نباشند و زاویه‌های برابر ۱۳۵ درجه ساخته باشند (شکل ۱۴ـالف).

در این‌جا، دیگر نمی‌توانیم، مقدار و اثر نیروهای OA و OB را، به کمک مقدار جبری آن‌ها (یعنی با نمادهای $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$) نشان دهیم، زیرا آن‌ها در یک راستا نیستند؛ محوری وجود ندارد که از هردوی آن‌ها بگذرد. در این‌جا باید نماد دیگری برای آن‌ها در نظر بگیریم. این نماد را به‌صورت «$\rightarrow$» در نظر گرفته‌اند و می‌نویسند: $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$. برای این نماد نامی هم برگزیده‌اند: بُردار.

از آن‌جا که بردارها در راستاهای مختلفی هستند و روی یک صفحه،

می‌توانند در هر جایی قرار گیرند، ناچاریم، به‌جای یک محور، از دو محور، یعنی دستگاه محورهای مختصات استفاده کنیم.

مبداء مختصات را بر نقطهٔ O و محور $x'x$ را بر امتداد OA و جهت مثبت را از O به A می‌گیریم. به‌طور طبیعی، تکلیف محور $y'y$ روشن می‌شود (شکل ۱۴،ب).

در این‌جا هم، کار دونفری که می‌خواهند جعبهٔ O را جابه‌جا کنند، از هم جدا می‌کنیم: اول یک نفر، O را به نقطهٔ $A(۵, ۰)$ منتقل می‌کند و، سپس، نفر دوم، آن را از A به C می‌برد. روشن است که خط راست AC باید با جهت مثبت محور $x'x$، زاویه‌ای برابر ۱۳۵ درجه بسازد و جهت از A به C، همان جهت از O به B باشد.

به‌این ترتیب، نتیجهٔ کار دو نفر، به‌معنای جابه‌جا کردن جعبه، از O به C است؛ یعنی مجموع دو بُردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ برابر بردار $\overrightarrow{OC}$ می‌شود:

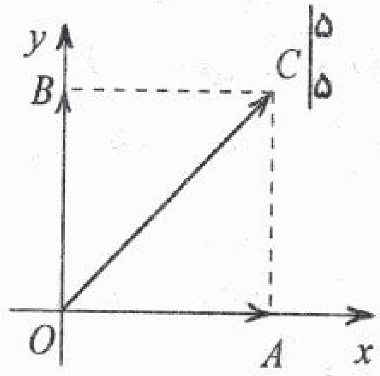
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

طول $\overrightarrow{OC}$ چقدر است؟ به‌سادگی می‌توانیم آن را محاسبه کنیم. چهارضلعی $OACB$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین

$$x_O + x_C = x_A + x_B \Rightarrow x_C = \frac{۵}{۲}(۲ - \sqrt{۲}),$$

$$y_O + y_C = y_A + y_B \Rightarrow y_C = \frac{۱}{۲}۵\sqrt{۲}$$

($\overrightarrow{OB}$ که طولی برابر ۵ دارد، وتر مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین OBB' است) بنابراین، با در دست داشتن مختصات نقطه‌های O و C، طول بردار



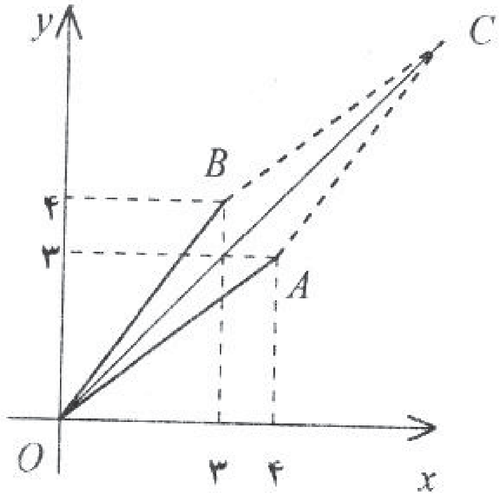
شکل ۱۵

$\overrightarrow{OC}$ به‌دست می‌آید:

$$|OC| = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}(۲-\sqrt{۲})^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}۵\sqrt{۲}\right)^{۲}} =$$
$$= \sqrt{۲۵(۲-\sqrt{۲})} = ۵\sqrt{۲-\sqrt{۲}} \approx ۳/۸۵$$

۴) نیروهایی را که بر نقطهٔ O وارد می‌شوند، به هم نزدیک‌تر می‌کنیم. $\overrightarrow{OA}$ را روی محور $x'x$ و $\overrightarrow{OB}$ را روی محور $y'y$ می‌گیریم (جهت نیروهایی که دو نفر بر نقطهٔ O وارد می‌کنند، بر هم عمودند ـ شکل ۱۵). اگر نیروهای دو نفر را، جدا از هم در نظر بگیریم، نفر اول جعبه را به نقطهٔ A می‌رساند و، سپس، نفر دوم، آن را از A به C می‌برد. چهارضلعی $OACB$ مربعی است با ضلع به طول ۵ و، بنابراین، طول قطر آن برابر $۵\sqrt{۲}$ می‌شود:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC};\ |OC| = ۵\sqrt{۲} \approx ۷/۰۷$$



شکل ۱۶

۵) نیروها را باز هم نسبت به یکدیگر نزدیک‌تر در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$A(۴, ۳), \quad B(۳, ۴)$$

نیروی $\overrightarrow{OA}$، نقطهٔ O را به A و، سپس، نیروی $\overrightarrow{AC}$ (نیروی نفر دوم، برابر $\overrightarrow{OB}$)، آن را از A به C منتقل می‌کند. درنتیجهٔ عمل دو نیرو، جعبه از نقطهٔ O به نقطهٔ C می‌رود (شکل ۱۶):

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

به کمک متوازی‌الاضلاع $OACB$، مختصات رأس C به‌دست می‌آید:

$$C(۷, ۷)$$

درنتیجه، می‌توان طول بردار $\overrightarrow{OC}$ را به‌دست آورد:

$$|OC| = \sqrt{۷^۲ + ۷^۲} = ۷\sqrt{۲} \approx ۹/۹$$

در این‌جا، نیروها نزدیک به هم بودند (باهم زاویه‌ای می‌سازند که نزدیک به ۱۶ درجه و ۲۰ دقیقه است)، به همین دلیل، مجموع بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و

$\vec{OB}$، طولی نزدیک به مجموع معمولی دو عدد ۵ و ۵ پیدا کرد.

نتیجه مهم. *اگر بردارهای دلخواه $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را در نظر بگیریم، همیشه داریم:*

$$\vec{OA} + \vec{OB}=\vec{OC}$$

که در آن، C راس متوازی‌الاضلاع $OACB$ است.

این نتیجه را به‌صورت دیگری هم می‌توان بیان کرد:

O، A و C را سه نقطهٔ دلخواه از صفحه می‌گیریم، در این صورت

$$\vec{OA} + \vec{AC}=\vec{OC} \qquad (۱)$$

و روشن است که $\vec{OC}= - \vec{CO}$، بنابراین

$$\vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CO}=\vec{0} \qquad (۲)$$

(روی ۰، نشانهٔ بردار گذاشته‌ایم. آن را بخوانید: بردار صفر).

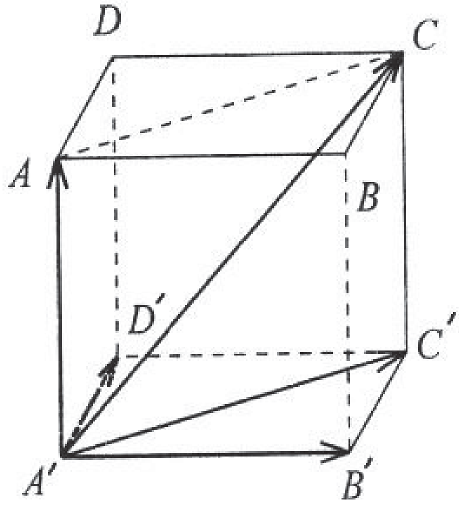
به این ترتیب، اگر سه نقطه A، B و C، روی یک خط راست باشند، می‌توان نوشت:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \qquad (۳)$$

یعنی، مجموع مقدارهای جبری $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$ برابر صفر است و، اگر A، B و C، روی یک صفحه باشند:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}=\vec{0} \qquad (۴)$$

یعنی، مجموع بردارهای $\vec{AB}$، $\vec{BC}$ و $\vec{CA}$ که بر یک صفحه قرار دارند، همواره برابر بردار صفر است.



شکل ۱۷

تعمیم نتیجه. ۱) برای n نقطهٔ دلخواه A، B، C، ...، L و M واقع بر یک خط راست، همیشه داریم:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\ldots+\overline{LM}+\overline{MA}=\circ \qquad (۵)$$

و برای n نقطهٔ دلخواه واقع بر صفحه:

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\ldots+\vec{LM}+\vec{MA}=\vec{\circ} \qquad (۶)$$

این رابطه‌ها، از اساسی‌ترین رابطه‌ها، برای محاسبه‌های برداری هستند.

مثال ۱. *مکعب $ABCDA'B'C'D'$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷). در نقطهٔ A'، وزنه‌ای قرار دارد که می‌توان آن را، در طول یک دقیقه، به یکی از راس‌های مجاور آن (B'، D' یا A) با صرف نیرو منتقل کرد. سه نفر این وزنه را، به طور هم‌زمان، یکی به سمت B'، دیگری به سمت D' و سومی به سمت A می‌کشند. بعد از یک دقیقه، وزنه در کجا قرار می‌گیرد؟*

حل. برای نیروهای $A'B'$ و $A'D'$ داریم:

$$\vec{A'B'}+\vec{A'D'}=\vec{A'C'}$$

اکنون باید مجموع دو نیروی $A'C'$ و $A'A$ را پیدا کنیم (شکل ۱۷). $A'C'CA$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین

$$\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C}$$

و درنتیجه

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C}$$

اگر مکعب ما، ضلعی به طول واحد داشته باشد، آن‌وقت خواهیم داشت $|\overrightarrow{A'C}| = \sqrt{۳}$ (چرا؟).

می‌توانستیم به‌جای بردارهای $\overrightarrow{A'D'}$ و $\overrightarrow{A'A}$، به‌ترتیب $\overrightarrow{B'C'}$ و $\overrightarrow{C'C}$ را انتخاب کنیم، دراین صورت، باتوجه به رابطه (۵)، به همان نتیجهٔ لازم می‌رسیدیم:

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C}$$

۲§. تعریف بردار

۱. تا این‌جا، به یاری مفهوم نیرو (دقیق‌تر، به یاری نیروهایی که بر یک جسم وارد می‌شود)، کم و بیش با واژهٔ **بُردار** آشنا شدیم. نیرو یک مفهوم فیزیکی و بردار یک مفهوم ریاضی است. به‌جای نیرو، می‌توانستیم از مفهوم سرعت یا از مفهوم میدان الکتریکی و مغناطیسی یا، به‌طور ساده، از مفهوم جابه‌جایی استفاده کنیم. همهٔ این‌ها، به فیزیک و مکانیک مربوط‌اند، در حالی که بردار، یک مفهوم ریاضی است.

ریاضیات، با انتزاع‌ها سروکار دارد، ولی سرچشمهٔ همهٔ مفهوم‌های انتزاعی ریاضیات را، باید در پیش‌آمدهایی جست‌وجو کرد که در دنیای واقعی و در طبیعت و جامعه رخ می‌دهد. ریاضیات با بررسی پدیده‌های مختلف، آن‌چه را به «کمیت» و «مقدار» مربوط می‌شود، از آن‌ها جدا می‌کند و با کشف

قانون‌های حاکم بر این کمیت‌ها، راهی برای مطالعهٔ دقیق این پدیده‌ها پیدا می‌کند . . . و این عمل را، انتزاع گویند. در ریاضیات، از تغییر مکان جسم، یا نیروهایی که بر آن وارد می‌شود، از سرعت یا شتاب جسم و یا از شدت میدان الکتریکی یا مغناطیسی صحبت نمی‌شود. در ریاضیات، از بردار صحبت می‌شود که، مفهوم آن و قانون‌های آن، در همهٔ آن‌ها کاربرد دارد. انتزاع، یکی از نیرومندترین ابزارها، برای شناخت قانون‌مندی‌های حاکم بر طبیعت و جامعه است. اگر ردپای مفهوم‌های انتزاعی ریاضیات را دنبال کنیم، سرانجام به واقعیت‌ها و پدیده‌های بیرون از ذهن می‌رسیم و، به همین مناسبت است که، ریاضیات، با همهٔ انتزاعی بودن خود، تا به این اندازه کاربرد دارد و به گفتهٔ خیام «به پیشگامی سزاوارتر است».

مفهوم بردار، از انتزاع ریاضی پدیده‌هایی به دست آمده که با «مقدار» و «جهت» خود مشخص می‌شوند. وقتی وجه مشترک این‌گونه پدیده‌ها را، جدا از ماهیت فیزیکی آن‌ها در نظر بگیریم، مفهوم «بردار» به‌وجود می‌آید. بردار، نه سرعت است و نه شدت میدان مغناطیسی؛ بردار یک مفهوم ریاضی است که البته، در دانش‌های گوناگون، مثل فیزیک و مکانیک و هندسه کاربرد دارد.

«محاسبهٔ برداری»، در رابطه‌ای تنگاتنگ با نیازهای مکانیک و فیزیک شکل گرفت. تا سدهٔ نوزدهم میلادی، برای حل مساله‌هایی که به بردار مربوط می‌شدند، از روش مختصاتی و دستگاه محورهای مختصات استفاده می‌کردند، یعنی عمل روی بردارها را، منجر به عمل روی مختصات آن‌ها می‌کردند (ما هم در این‌جا، در آغاز کار، همین روش را به‌کار گرفتیم). از میانه‌های سدهٔ نوزدهم و با تلاش بسیاری از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان، «محاسبهٔ برداری» پدید آمد. در «محاسبهٔ برداری»، عمل‌ها به‌طور مستقیم روی خود بردارها، بدون استفاده از روش مختصاتی، انجام می‌شود. «ویلیام هامیل‌تون» (۱۸۰۵_۱۸۶۵ میلادی) ریاضی‌دان ایرلندی و «هرمان گراسمان» (۱۸۰۹_۱۸۷۷ میلادی) ریاضی‌دان آلمانی را باید پایه‌گذار «محاسبهٔ برداری»

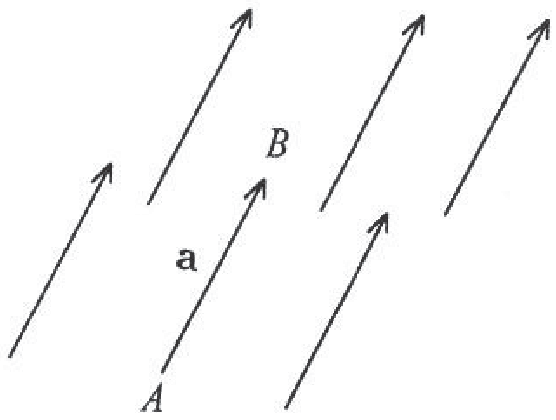
دانست که در فاصلهٔ سال‌های ۱۸۴۴ تا ۱۸۵۰ میلادی، نظریهٔ «عددهای فوق مختلط» را به‌وجود آوردند. «جیمس کلرک ماکسول» (۱۸۳۱_۱۸۷۹ میلادی)، فیزیک‌دان انگلیسی، در نوشته‌های خود دربارهٔ الکتریسیته و مغناطیس، از این اندیشه‌ها استفاده کرده است. «محاسبه برداری» به صورت امروزی آن را، باید مدیون «ژیبس» (۱۸۳۹_۱۹۰۳ میلادی) فیزیک‌دان امریکایی بدانیم. قضیهٔ اصلی «آنالیز برداری» را «استروگرادسکی» دانشمند روسی ثابت کرد و به‌ویژه، کتاب «آنالیز برداری»، نوشتهٔ «سومُوف» دانشمند دیگر روسی که در سال ۱۹۰۷ منتشر شد، سهم بزرگی در تنظیم دقیق «محاسبهٔ برداری» دارد.

۲. گرچه ممکن است عجیب به‌نظر آید، برای **تعریف بردار** به دشواری‌هایی برمی‌خوریم. روش‌های گوناگونی برای نزدیک شدن به تعریف بردار وجود دارد. حتا اگر خود را به روش‌های هندسی محدود کنیم (راهی که در این‌جا از آن استفاده کرده‌ایم)، باز هم دیدگاه‌های متفاوتی برای بیان مفهوم بردار وجود دارد. با همهٔ این‌ها، باید تعریفی را پذیرفت و براساس آن عمل کرد. اگر بخواهیم با دید هندسی، بردار را تعریف کنیم، باید تعریف زیر را، که هم درست است و هم ساده، بپذیریم:

بردار، به خانوادهٔ همهٔ پاره‌خط‌های راستی گفته می‌شود که با هم موازی و در یک جهت‌اند و درضمن، درازایی برابر دارند (شکل ۱۸).

به این ترتیب، بردار عبارت است از مجموعه‌ای بی‌پایان از پاره‌خط‌های راست جهت‌دار. از هر نقطهٔ صفحه، یک پاره‌خط راست آغاز می‌شود؛ درضمن همهٔ این پاره‌خط‌های راست، موازی و در یک جهت‌اند و درازایی برابر دارند.

بردار را، روی شکل، با پاره‌خط راستی که، به‌وسیلهٔ نشان پیکان، جهت‌دار شده است، نشان می‌دهند (یعنی، به‌جای همهٔ پاره‌خط‌های راستِ معرف یک بردار، تنها یکی از آن‌ها را در نظر می‌گیرند). در نوشته‌های چاپی، بردار را



شکل ۱۸

با حرف‌های کوچک لاتینی و به‌صورت درشت (حرف سیاه) نشان می‌دهند: $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و غیره. ولی در نوشته‌های دستی (مثل وقتی که روی تختهٔ سیاه یا دفترچهٔ خود می‌نویسیم)، چون نمی‌توان حرف سیاه را از حرف نازک تمیز داد، بهتر است نشانهٔ یک پیکان کوتاه روی حرف لاتینی بگذاریم تا به معنای بردار باشد: $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و غیره. درازای بردار را، اغلب، با نماد قدرمطلق نشان می‌دهند: $|\mathbf{a}|$ یا $|\vec{a}|$.

وقتی بردار را به‌صورت یک پاره‌خط راست نشان می‌دهیم. باید به‌خاطر داشته باشیم که، دو انتهای این پاره‌خط راست، حقی برابر ندارند: پیکانی که جهت بردار را مشخص می‌کند، نشان می‌دهد که یکی از دو انتها، آغاز و دیگری پایان بردار است. در شکل ۱۸، از خانوادهٔ پاره‌خط‌های راست جهت‌دار، یکی را به‌عنوان نماینده انتخاب کرده‌ایم که از نقطهٔ A آغاز می‌شود و در نقطهٔ B پایان می‌یابد. چنین برداری را، رسم بردار $\mathbf{a}$ از نقطهٔ مفروض A گویند. بنابراین، بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان از هر نقطهٔ دلخواه واقع بر صفحه رسم کرد. معمول است که می‌نویسند:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

این برابری به‌معنای آن است که، اگر بردار $\mathbf{a}$ را از نقطهٔ A رسم کنیم،

بردار $\overrightarrow{AB}$، در جهت از A به B، به‌دست می‌آید. به دلیل سادگی کار، معمول شده است، بردارها را به‌صورت $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{OA}$ و غیره نشان دهند. ولی باید توجه داشت، $\overrightarrow{AB}$ معرف همهٔ خانوادهٔ بردار **a** نیست و تنها یکی از پاره‌خط‌های راست جهت‌دار متعلق به این خانواده رامعرفی می‌کند. با همهٔ این‌ها، $\overrightarrow{AB}$، درواقع تمامی خانواده را معرفی می‌کند، یعنی با در دست داشتن آن، می‌توان همهٔ عضوهای خانوادهٔ بردار **a** را به‌دست آورد. به همین جهت، ضمن عمل روی بردارها، $\overrightarrow{AB}$ را می‌توان به هر جای دیگری از صفحه جابه‌جا کرد، یعنی هر نقطه‌ای را که لازم باشد، به عنوان آغاز در نظر گرفت و پاره‌خط راستی، موازی و هم‌جهت و با درازای AB رسم کرد و، به‌جای $\overrightarrow{AB}$، عمل را روی آن انجام داد.

***یادداشت.** اگر بخواهیم دقت ریاضی را رعایت کنیم، بهتر است نماد $\overrightarrow{AB}$ را برای پاره‌خط راست جهت‌دارِ با آغاز A و پایان B به‌کار بریم و نماد **a** یا $\vec{a}$ را برای بردار (یعنی خانوادهٔ کامل این پاره‌خط‌های راست). به این معنا، برابری (۱) درست نیست، زیرا نمی‌توان خانواده‌ای را که شامل بی‌نهایت پاره‌خط راست جهت‌دار است، با یکی از عضوهای آن برابر دانست، بنابراین، دقیق‌تر آن است که، به‌جای رابطهٔ (۱)، بنویسیم:

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a} \qquad (۲)$$

یعنی پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ به خانوادهٔ پاره‌خط‌های راست جهت‌دار **a** (یعنی بردار **a**) تعلق دارد. باوجود این، اگر از این به بعد، رابطهٔ (۱) را به‌جای رابطهٔ (۲) به‌کار می‌بریم، نباید به معنای بی‌دقتی در کار، بلکه به معنای پیروی از روش معمول دانست.

اگر دو پاره‌خط راست $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعلق به یک خانواده، و مثلاً بردار **a**، باشند، گاهی آن‌ها را بردارهای برابر و گاهی بردارهای **هم‌سنگ** می‌گویند که، البته، هیچ‌کدام را نمی‌توان دقیق دانست.

در برخی نوشته‌ها، وقتی بردار به مفهوم عام و دقیق آن باشد، **بردار آزاد** و وقتی از نقطهٔ ثابتی آغاز شده باشد (یعنی وقتی به‌صورت پاره‌خط راست جهت‌دار باشد)، **بردار وابسته** نامیده می‌شود.

۳. چند تعریف. ۱) **بردار صفر.** به هر برداری که درازای برابر صفر داشته باشد، بردار صفر گویند. بردار صفر، جهت مشخصی ندارد: بردار صفر، از نظر جهت، نامعین است. در نمایش بردار به‌وسیلهٔ خط راست جهت‌دار، بردار صفر به هر برداری گفته می‌شود که آغاز و پایان آن بر هم منطبق باشد:

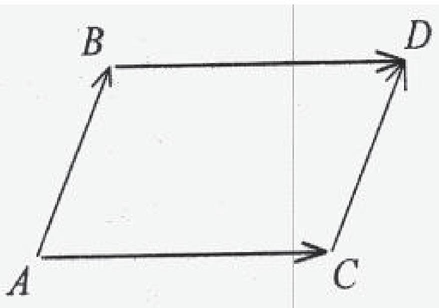
$$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{OC}=\ldots=\vec{0}$$

بردارهای هم‌راستا. همهٔ بردارهایی را که با هم موازی باشند، بدون توجه به جهت و درازای آن‌ها، بردارهای هم‌راستا گویند. به‌عنوان نمونه، بردارهایی که روی یک خط راست باشند، با هر آغازی، هر جهتی و هر اندازه‌ای، هم‌راستا هستند.

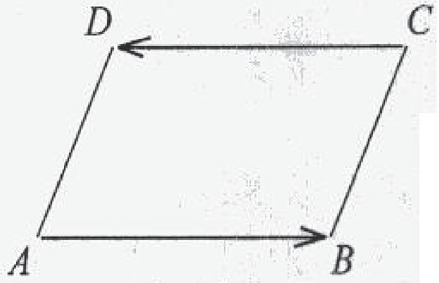
شعاع برداری. وقتی بخواهیم بردار را با پاره‌خط راست جهت‌دار نشان دهیم، می‌توانیم آغاز آن را در هر نقطه‌ای از صفحه (و در حالت کلی‌تر، در هر نقطه‌ای از فضا) انتخاب کنیم. معمول است، وقتی بردار $\mathbf{a}$، به‌وسیلهٔ پاره‌خط راست جهت‌داری با آغاز از نقطهٔ O انتخاب شود، آن را با نماد $\mathbf{a}(O)$ نشان دهند.

ضمن حل بسیاری از مساله‌ها، برای ساده‌تر شدن راه‌حل، بهتر است یک نقطهٔ ثابت را، به‌عنوان آغاز پاره‌خط‌های راستِ جهت‌دارِ نمایندهٔ بردارها در نظر بگیریم. در این صورت (یعنی، وقتی آغاز بردارها نقطهٔ ثابت و معینی باشد)، هر بردار تنها با نقطهٔ پایان آن مشخص می‌شود.

O را نقطهٔ ثابتی از صفحه (یا فضا) و P را نقطه‌ای دلخواه در صفحه (یا فضا) فرض می‌کنیم. در این صورت $\overrightarrow{OP}$ را **شعاع برداری** نقطهٔ P نسبت به O گویند. انتخاب آغاز مشترک برای همهٔ بردارها، این سود را هم دارد که



شکل ۲۰



شکل ۱۹

بین بردارها و نقطه‌های صفحه، تناظر یک‌به‌یک برقرار می‌کند: هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار و، برعکس، هر بردار متناظر با یک نقطه از صفحه است. شعاع برداری خود نقطهٔ O، برابر بردار صفر است: $\overrightarrow{OO}=\overrightarrow{o}$.

بردارهای متقابل. اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، هم‌راستا و با طول‌های برابر، ولی در جهت‌های مختلف باشند، به‌آن‌ها بردارهای متقابل گویند. گاهی دو بردار متقابل را **بردارهای قرینه** هم گفته‌اند.

در شکل ۱۹، اگر $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌وقت بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$؛ همچنین بردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$، بردارهای متقابل‌اند.

مثال ۲. *می‌دانیم $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. دربارهٔ بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ چه می‌توان گفت؟*

حل. وقتی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$، آن‌وقت چهارضلعی $ACDB$ متوازی‌الاضلاع می‌شود (شکل ۲۰)، درنتیجه، پاره‌خط‌های راست AC و BD هم‌راستا، هم‌جهت با طول‌هایی برابرند. بنابراین $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

§۳. عمل با بردارها_محاسبهٔ برداری

تعریف بردار، به خودی خود، نمی‌تواند مفهومی پرمضمون و سودمند باشد. ارزش مفهوم بردار و کاربردهای فراوان آن، وقتی آشکار می‌شود که بتوانیم «محاسبه برداری» را، که بیشتر یک «محاسبهٔ هندسی» است، سازمان دهیم و

امکان جمع، تفریق و یک رشته عمل‌های دیگر را دربارهٔ آن‌ها به‌دست آوریم؛ درست مثل مفهوم عدد که اگر با عمل‌های حسابی روی عددها آشنا نباشیم، به خودی خود، چیز جالبی به ما نمی‌دهد.

۱. **مجموع چند بردار.** با مجموع دو یا چند بردار، پیش از این آشنا شدیم و دیدیم:

$$\vec{OA} + \vec{OB}=\vec{OC}$$

که در آن، C راس چهارم متوازی‌الاضلاع $OACB$ است (قانون متوازی‌الاضلاع). همچنین دیدیم، برای هر سه نقطهٔ A، B و C از صفحه، همواره داریم:

$$\vec{AB} + \vec{BC}=\vec{AC} \quad \text{یا} \quad \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}=\vec{0}$$

و یا برای n نقطهٔ دلخواه از صفحه

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \ldots + \vec{LM}=\vec{AM} \qquad (۱)$$

و یا

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \ldots + \vec{LM} + \vec{MA}=\vec{0}$$

ویژگی‌های جمع. در «محاسبهٔ برداری»، ویژگی‌های جمع عددها را به یاد می‌آورد.

ویژگی اول. $\vec{AB} + \vec{0}=\vec{AB}$؛

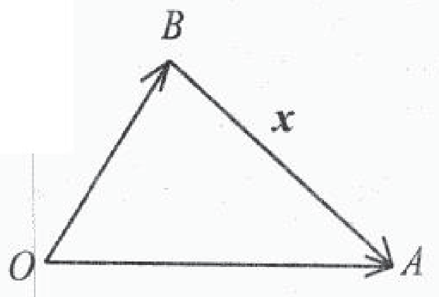
ویژگی دوم. $\vec{AB} + \vec{BA}=\vec{AB} +(- \vec{AB}) =\vec{0}$؛

ویژگی جابه‌جایی: $\vec{AB} + \vec{CD}=\vec{CD} + \vec{AB}$؛

ویژگی شرکت‌پذیری:

$$(\vec{AB} + \vec{CD})+ \vec{EF}=\vec{AB} +(\vec{CD} + \vec{EF})$$

با استفاده از همین ویژگی شرکت‌پذیری بود که توانستیم سه یا چند بردار را با هم جمع کنیم.



شکل ۲۱

شباهت بین عددها و بردارها را می‌توان ادامه داد و مثلاً، برای تعریف تفاضل دو بردار و عمل روی برابری‌ها، از آن استفاده کرد.

۲. تفاضل دو بردار. مثل حالت عددها، در این‌جا هم، تفاضل

$$\vec{OA} - \vec{OB}$$

به برداری مثل $\mathbf{x}$ می‌گوییم که اگر آن را با بردار $\vec{OB}$ جمع کنیم، بردار $\vec{OA}$ به‌دست آید (شکل ۲۱).

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \mathbf{x} \Rightarrow \vec{OB} + \mathbf{x} = \vec{OA}$$

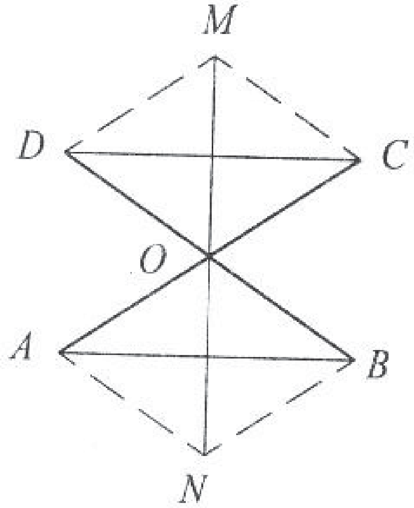
و یا باتوجه به شکل ۲۱:

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

درستی این برابری روشن است، زیرا اگر $\vec{OB}-$ را به سمت راست برابری ببریم، به‌دست می‌آید:

$$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}$$

که باتوجه به مجموع دو بردار، درستی آن روشن است.



شکل ۲۲

مثال ۳. *بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$، در یک صفحه واقع‌اند و درازایی برابر دارند. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:*

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$$

آن‌وقت، چهارضلعی با راس‌های A، B، C و D، یک مستطیل است.

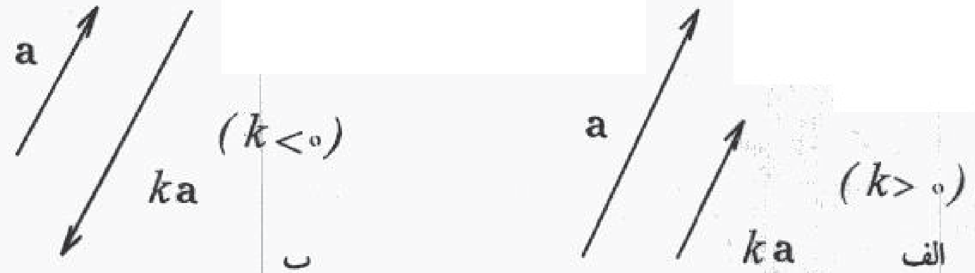
حل. فرض می‌کنیم (شکل ۲۲):

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON},\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$$

چهارضلعی‌های $OANB$ و $OCMD$، متوازی‌الاضلاع‌هایی هستند که، هریک از آن‌ها، دو ضلع مجاور برابر دارند، زیرا بنابر فرض مساله

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}| \text{ و } |\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|$$

بنابراین، این چهارضلعی‌ها لوزی‌اند؛ درضمن دو لوزی، برابر و قابل انطباق بر یکدیگرند.



شکل ۲۳

اکنون، به چهارضلعی $ABCD$ توجه می‌کنیم. در این چهارضلعی داریم:

$$|AB| = |CD|, \quad |AD| = |BC|$$

یعنی، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. ولی در این متوازی‌الاضلاع، طول‌های دو قطر با هم برابرند (چرا؟)، بنابراین $ABCD$ یک مستطیل است.

۳. ضرب بردار در عدد. بنا به‌تعریف، اگر $\mathbf{a}$ برداری دلخواه و k عددی حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) باشد، آن‌وقت حاصل‌ضرب $k\mathbf{a}$ به برداری گفته می‌شود که با $\mathbf{a}$ موازی و درازایی $|k|$ برابر درازای $\mathbf{a}$ داشته باشد؛ درضمن، دو بردار $\mathbf{a}$ و $k\mathbf{a}$، در حالت مثبت بودن k هم‌جهت و در حالت منفی بودن k در خلاف جهت یکدیگرند (شکل ۲۳).

ضرب یک عدد در یک بردار، دارای همان ویژگی‌های ضرب عددها در یکدیگر است:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \vec{0}; \quad k \cdot \vec{0} = \vec{0};$$
$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}; \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a};$$
$$k(m\mathbf{a}) = km \cdot \mathbf{a}; \quad (k+m) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + m \cdot \mathbf{a};$$
$$k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$$

نتیجه. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، موازی باشند و درضمن $\mathbf{a} \neq \vec{0}$، آن‌وقت می‌توان عدد درست k را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$.

روشن است، اگر جهت دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یکی باشد $k > 0$ و در حالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در خلاف جهت یکدیگر باشند، $k < 0$. درضمن

$$|k| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

مثال ۴. *الف) مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و میانه‌های آن را AA'، BB' و CC' می‌نامیم. هریک از بردارهای $\vec{AA'}$، $\vec{BB'}$ و $\vec{CC'}$ را برحسب بردارهای $\vec{AB}$، $\vec{BC}$ و $\vec{AC}$ بنویسید.*

ب) آیا می‌توان هریک از بردارهای $\vec{AA'}$، $\vec{BB'}$ و $\vec{CC'}$، تنها برحسب دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ نوشت؟

حل. الف) بنا به‌تعریف مجموع دو بردار داریم:

$$\vec{AA'}=\vec{AB}+\vec{BA'}$$

A' وسط ضلع BC و بردارهای $\vec{BA'}$ و $\vec{BC}$ هم‌جهت‌اند، بنابراین

$$\vec{AA'}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$$

به همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\vec{BB'}=\vec{BA}+\vec{AB'}=-\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC};$$

$$\vec{CC'}=\vec{CA}+\vec{AC'}=-\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{AB}$$

ب) بله می‌توان، زیرا داریم

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$$

به این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\vec{AA'}=\vec{AB}+\frac{۱}{۲}\vec{BC};$$

$$\vec{BB'}=\frac{۱}{۲}\vec{AC}-\vec{AB}=\frac{۱}{۲}(\vec{AB}+\vec{BC})-\vec{AB}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(\vec{BC}-\vec{AB});$$

$$\vec{CC'}=-(\vec{BC}+\frac{۱}{۲}\vec{AB})$$

مثال ۵. سه نقطهٔ A، B و C روی یک صفحه‌اند. ثابت کنید، وقتی و تنها وقتی نقطهٔ C، بر خط راست AB قرار دارد که برای هر نقطهٔ دلخواه O از صفحه، داشته باشیم:

$$\vec{OC}=k\,\vec{OA}+(۱-k)\,\vec{OB} \qquad (۱)$$

که در آن، k عددی حقیقی است.

حل. ۱) فرض می‌کنیم، نقطهٔ C روی خط راست AB باشد، در این صورت بدون توجه به جای نقطهٔ C روی خط راست AB، باید داشته باشیم:

$$\vec{BC}=k\,\vec{BA} \qquad (۲)$$

نقطهٔ دلخواه O را روی صفحه در نظر می‌گیریم؛ این دو برابری روشن‌اند:

$$\vec{BC}=\vec{BO}+\vec{OC}, \quad \vec{BA}=\vec{BO}+\vec{OA}$$

بنابراین، برابری (۲) به‌ترتیب چنین می‌شود:

$$\vec{BO}+\vec{OC}=k(\vec{BO}+\vec{OA});$$

$$\vec{OC} - \vec{OB} = k(\vec{OA} - \vec{OB});$$
$$\vec{OC} = k\cdot \vec{OA} + (۱ - k) \vec{OB}$$

که همان شرط (۱) است: برای این‌که نقطهٔ C بر خط راست AB واقع باشد، *لازم است* شرط (۱) برقرار باشد.

۲) ثابت می‌کنیم، **کافی است** شرط (۱) برقرار باشد تا نقطهٔ C بر خط راست AB قرار گیرد.

شرط (۱) را، به‌این ترتیب، می‌توان تبدیل کرد:

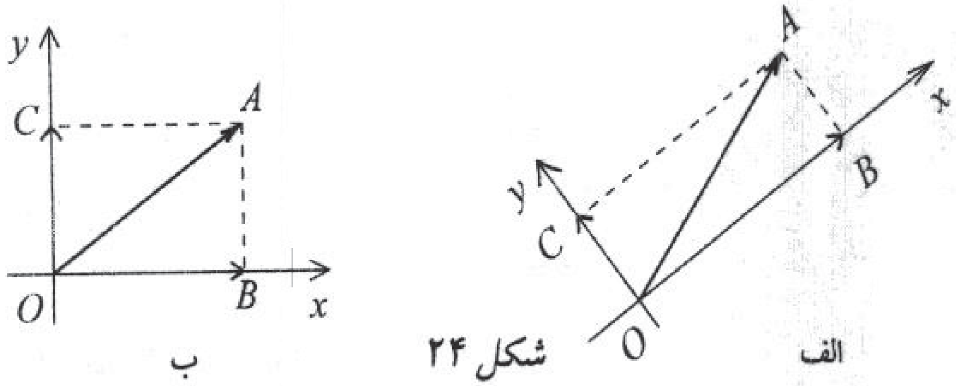
$$\vec{OC} = k\,\vec{OA} + \vec{OB} - k\cdot \vec{OB};$$
$$\vec{OC} - \vec{OB} = k(\vec{OA} - \vec{OB});$$
$$\vec{BO} + \vec{OC} = k(\vec{BO} + \vec{OA});$$
$$\vec{BC} = k\cdot \vec{BA}$$

و این برابری تنها وقتی برقرار است که، بردارهای $\vec{BC}$ و $\vec{BA}$، با یک خط راست موازی باشند، یعنی وقتی که نقطهٔ C بر خط راست AB قرار گیرد.

۴. تجزیه یک بردار به دو بردار عمود بر هم. بردار OA را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۴_الف).

از نقطهٔ O، نیم‌خط راست دلخواه Ox رامی‌گذرانیم، سپس ازنقطهٔ O و در صفحهٔ AOx، نیم‌خط راست Oy را عمود بر Ox رسم می‌کنیم. اکنون اگر تصویر نقطهٔ A را بر Ox و Oy به‌دست آوریم (B و C)، آن‌وقت خواهیم داشت:

$$\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA}$$



شکل ۲۴

و به این ترتیب، بردار $\overrightarrow{OA}$ به دو بردار $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ که عمود بر یکدیگرند، تجزیه می‌شود.

درواقع، اگر $\overrightarrow{OA}$ را در صفحهٔ محورهای مختصات xOy در نظر بگیریم (شکل ۲۴ـب) و مختصات نقطهٔ A (یعنی مختصات بردار OA) را $(x_۱, y_۱)$ بگیریم، برای نقطه‌های B و C، یعنی بردارهای $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ به‌دست می‌آید:

$$B(x_۱, ۰),\ C(۰, y_۱)$$

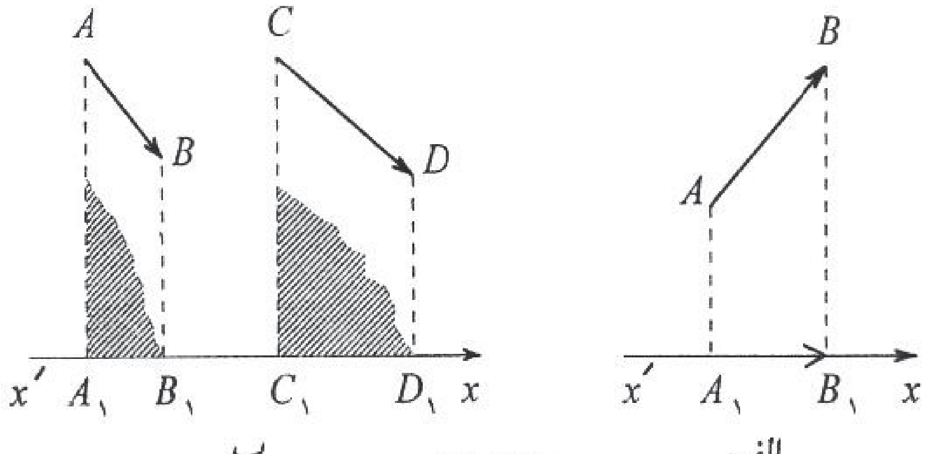
در این صورت، بردارهای $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را، **مولفه‌های** بردار OA گویند.

تجزیه بردار به دو بردار دیگر را می‌توان در حالت کلی انجام داد، ولی در این‌جا، تنها به تجزیهٔ بردار به دو بردار عمود بر هم (که به‌ویژه در فیزیک و مکانیک کاربردهای فراوان دارد) بسنده می‌کنیم.

۴§. تصویر بردار و مختصات بردار

۱. تصویر یک بردار بر یک محور. $x'x$ را یک محور و $\overrightarrow{AB}$ را پاره‌خط راست جهت‌دار می‌گیریم (شکل ۲۵).

تصویر نقطه‌های A و B بر محور $x'x$ (یعنی پای عمودهای وارد از A



شکل ۲۵

و B بر $x'x$) را A_1 و B_1 می‌نامیم. درازای پاره‌خط راست A_1B_1 را وقتی مثبت می‌گیریم که جهت از A_1 به B_1 با جهت محور $x'x$ یکی باشد؛ در حالت عکس، آن را منفی می‌گیریم. در این صورت،

اگر درازای $\overrightarrow{A_1B_1}$ (یعنی درازای تصویر $\overrightarrow{AB}$ بر $x'x$) را x و بردار واحد را بر این محور، $\overrightarrow{i}$ بنامیم، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x \cdot \overrightarrow{i}$$

که در آن، x عددی حقیقی است؛ درضمن بردارهای $\overrightarrow{A_1B_1}$ و $\overrightarrow{i}$ در یک راستا هستند.

اگر $\overrightarrow{A_1B_1}$ را تصویر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{C_1D_1}$ را تصویر $\overrightarrow{CD}$ فرض کنیم، آن‌وقت

۱) تصویر مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برابر است با مجموع تصویرهای آن‌ها:

$$\text{تصویر}\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1}$$

۲) اگر تصویر $\vec{AB}$ را A_1B_1 بنامیم، آن‌وقت

$$\text{تصویر}\ (m\cdot \vec{AB}) = m\cdot \vec{A_1B_1}$$

۲. تصویر بردار بر محورهای مختصات. بردار $\vec{AB}$ را روی صفحهٔ محورهای مختصات در نظر می‌گیریم و تصویرهای $\vec{AB}$ را بر محورهای $x'x$ و $y'y$، به‌ترتیب x و y می‌نامیم (x و y، عددهایی حقیقی هستند). در این صورت (x, y) را مختصات بردار $\vec{AB}$ در دستگاه محورهای مختصات xOy گویند.

اگر مختصات نقطهٔ A را (x_1, y_1) و مختصات نقطه B را (x_2, y_2) بگیریم، آن‌وقت بردار $\vec{AB}$ به مختصات $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ خواهد بود.

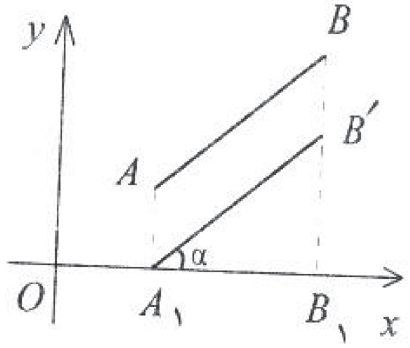
اگر آغاز بردار را در مبداء مختصات بگیریم و آن را بردار $\vec{OA}$ بنامیم (A، پایان بردار است)، آن‌وقت (x, y)، مختصات نقطهٔ A، همان مختصات بردار $\vec{OA}$ است و به یکی از این صورت‌ها نوشته می‌شود:

$$\vec{OA}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. ,\quad \overline{OA}(x,y),\quad \vec{OA}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مختصات بردار $\vec{OA}$ را به‌صورت دیگری هم می‌توان تعریف کرد. اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را بردارهای واحد محورهای $x'x$ و $y'y$ بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\vec{OA}= x\cdot \vec{i} + y\cdot \vec{j}$$

اگر A_1B_1 تصویر $\vec{AB}$ بر محور $x'x$ و زاویهٔ بین $\vec{AB}$ و $x'x$ برابر α باشد (شکل ۲۶)، از مثلث قائم‌الزاویهٔ A_1B_1B' به‌دست می‌آید:



شکل ۲۶

$$x = |\,\overrightarrow{AB}\,|\cos\alpha$$

که در آن، x در ازای تصویر $\overrightarrow{AB}$ بر محور $x'x$ است. درضمن، زاویهٔ α، بین $\overrightarrow{A_1B'}$ و $x'x$، به‌معنای آن است که، اگر جهت مثبت محور $x'x$ را در جهت مثلثاتی (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت) به اندازهٔ α دوران دهیم، بر جهت مثبت بردار $\overrightarrow{A_1B'}$ قرار گیرد. بردار $\overrightarrow{A_1B'}$ هم‌سنگ بردار $\overrightarrow{AB}$ است و می‌دانیم، وقتی از بردار $\overrightarrow{AB}$ صحبت می‌کنیم، می‌توانیم به‌جای آن، بر پاره‌خط راست جهت‌دار دیگری را انتخاب کنیم که هم‌جهت با آن و با درازایی برابر آن باشد. به همین ترتیب، اگر $\overrightarrow{AB}$ را بر محور $y'y$ تصویر کنیم، به‌دست می‌آید:

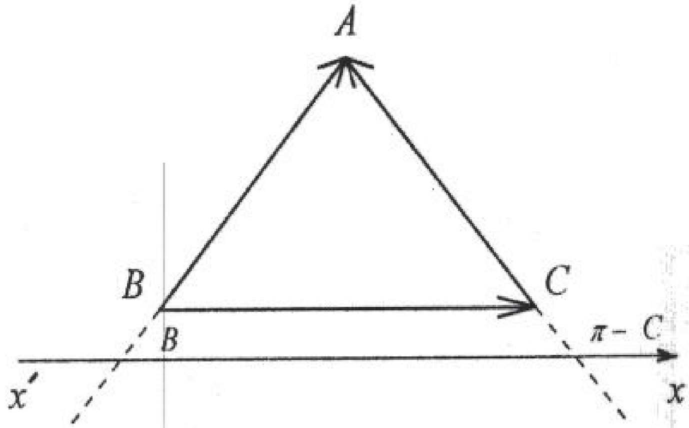
$$y = |\,\overrightarrow{AB}\,|\sin\alpha$$

مثال ۶. در مثلث ABC فرض می‌کنیم:

$$|BC| = a,\ |AC| = b,\ |AB| = c$$

زاویه‌های مثلث را با $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید:

$$a = b\cos\widehat{C} + c\cos\widehat{B}$$



شکل ۲۷

حل. بردارهای $\vec{BA}$، $\vec{CA}$ و $\vec{BC}$ و محور $x'x$ را موازی و هم‌جهت با $\vec{BC}$ در نظر می‌گیریم (شکل ۲۷). روشن است که

$$\vec{BC}=\vec{BA}+\vec{AC}=\vec{BA}-\vec{CA} \qquad (1)$$

از برابری (۱) نتیجه می‌شود:

$$\text{تصویر } \vec{BC} = \text{تصویر } \vec{AB} + \text{تصویر } \vec{AC} \qquad (2)$$

بردارهای $\vec{BC}$، $\vec{BA}$ و $\vec{CA}$ با محور $x'x$، به‌ترتیب زاویه‌هایی برابر ۰، $\widehat{B}$ و $\pi-\widehat{C}$ می‌سازند (شکل ۲۷ را ببینید). بنابراین

$$\text{تصویر } \vec{BC} \text{ روی } x'x = |\vec{BC}|\cos 0 = a,$$

$$\text{تصویر } \vec{BA} \text{ روی } x'x = |\vec{BA}|\cos\widehat{B} = c\cos\widehat{B},$$

$$\text{تصویر } \vec{AC} \text{ روی } x'x = -(\text{تصویر } \vec{CA} \text{ روی } x'x) =$$

$$= -|\vec{CA}|\cos(\pi-\widehat{C}) = b\cos\widehat{C}$$

بنابراین، باتوجه به برابری (۲) به‌دست می‌آید:

$$a = b\cos\widehat{C} + c\cos\widehat{B}$$

به این برابری، **دستور تصویر** هم می‌گویند.

§۵. حاصل‌ضرب عددی یا حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار

۱. اگر درازای بردار $\vec{AB}$ را a و درازای بردار $\vec{CD}$ را b و زاویهٔ بین دو بردار را α بگیریم، بنابرتعریف، حاصل‌ضرب عددی دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ برابر است با $ab\cos\alpha$:

$$(\vec{AB})(\vec{CD}) = |\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}| \cdot \cos(\widehat{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}) = ab\cos\alpha$$

از همین تعریف، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$(\vec{AB})(\vec{CD}) = (\vec{CD})(\vec{AB})$$

در حالتی که یکی از بردارهای $\vec{AB}$ یا $\vec{CD}$ برابر بردار صفر باشد، این تعریف معنای خود را از دست می‌دهد (زیرا نمی‌توان بین یک بردار و بردار صفر، زاویه‌ای پیدا کرد)، باوجود این، حاصل‌ضرب عددی دو بردار را برابر صفر می‌گیرند.

ولی وقتی حاصل‌ضرب عددی دو بردار برابر صفر باشد، ممکن است هیچ‌کدام از آن‌ها، برابر بردار صفر نباشند، زیرا اگر بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ بر هم عمود باشند، چون $\cos 90^\circ = 0$، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر صفر می‌شود.

برای دو بردار هم‌راستا (موازی با هم)، حاصل‌ضرب عددی برابر حاصل‌ضرب درازای آن‌هاست. مثلاً داریم:

$$(\vec{AB})^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AB}| \cos 0 = |\vec{AB}|^2$$

توجه کنید: حاصل‌ضرب عددی دو بردار، یک بردار نیست، بلکه یک عدد است (و به‌همین دلیل، تقسیم دو بردار بر یکدیگر، معنایی پیدا نمی‌کند).

۲. اکنون به دستور محاسبهٔ حاصل‌ضرب عددی دو بردار، به‌یاری مختصات آن‌ها، می‌پردازیم. بردارهای $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$A(x_۱, y_۱),\ B(x_۲, y_۲)$$

بنابراین، اگر بردارهای واحد را روی محورهای‌مختصات، به‌ترتیب $\overrightarrow{i}$ (در جهت مثبت محور $x'x$) و $\overrightarrow{j}$ (در جهت مثبت محور $y'y$) بگیریم، داریم:

$$\overrightarrow{a}= x_۱ \overrightarrow{i} +y_۱ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{b}= x_۲ \overrightarrow{i} +y_۲ \overrightarrow{j}$$

درضمن، می‌دانیم:

$$\overrightarrow{i}^۲=\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}= | \overrightarrow{i} | \cdot | \overrightarrow{i} | \cos ۰ = ۱;\ \overrightarrow{j}^۲ = ۱,\ \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}= ۰$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}= (x_۱ \overrightarrow{i} +y_۱ \overrightarrow{j})(x_۲ \overrightarrow{i} +y_۲ \overrightarrow{j}) =$$
$$= x_۱x_۲ \overrightarrow{i}^۲ +(x_۱y_۲ + x_۲y_۱) \overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j} +y_۱y_۲ \overrightarrow{j}^۲ = x_۱x_۲ + y_۱y_۲$$

به این ترتیب، حاصل‌ضرب عددی دو بردار را می‌توان با این دستور محاسبه کرد:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}= x_۱x_۲ + y_۱y_۲$$

مثال ۷. طول ضلع‌های مثلث ABC را $a = |BC|$، $b = |AC|$ و $c = |AB|$ می‌گیریم. ثابت کنید:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab \cos \widehat{C}$$

حل. این برابریِ برداری روشن است:

$$\vec{AB}=\vec{AC}+\vec{CB}\Rightarrow\vec{AB}=\vec{CB}-\vec{CA}$$

با مجذور کردن دو طرف برابری به‌دست می‌آید:

$$\vec{AB}^{۲}=(\vec{CB}-\vec{CA})^{۲}=\vec{CB}^{۲}-۲\,\vec{CB}\cdot\vec{CA}+\vec{CA}^{۲}=$$
$$=a^{۲}-۲ab\cos\widehat{C}+b^{۲}$$

و چون $(\vec{AB})^{۲}=c^{۲}$، پس

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C$$

این دستور و دستورهای مشابه آن، یعنی

$$b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac\cos\widehat{B},$$
$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\widehat{A}$$

به **قضیه کسینوس‌ها** مشهورند. به یاری این دستورها، با در دست داشتن طول‌های دو ضلع و مقدار زاویهٔ بین آن‌ها، می‌توان طول ضلع سوم را محاسبه کرد.

تمرین‌ها

*۱۵۱. در بسیاری از متن‌های ریاضی، بردار را به‌عنوان «پاره‌خط راست جهت‌دار» تعریف می‌کنند. درضمن، پاره‌خط‌های راست جهت‌داری را که هم‌جهت و با درازایی برابر باشند، بردارهای برابر (و گاهی بردارهای هم‌سنگ) گویند. آیا این تعریف اشکالی دارد؟

۱۵۲. نقطهٔ $A(۳,-۵)$ را جابه‌جا کرده‌ایم تا به نقطهٔ $B(-۳,۴)$ برسد. می‌دانیم $\vec{AB}=\vec{a}$، $\vec{CD}=\vec{a}$ و $C(۲,۵)$. مختصات D را پیدا کنید.

*۱۵۳. چگونه می‌توان بردارهای واقع بر صفحه را با دوجمله‌ای $ax+b$ تعریف کرد؟

۱۵۴. ثابت کنید، برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همیشه داریم:

$$|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}\pm\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$$

۱۵۵. ثابت کنید، برای مربع $ABCD$ داریم:

$$\vec{AC}+\vec{BD}=\vec{AD}+\vec{BC}$$

۱۵۶. نقطه‌های A، B و C، محیط دایره را به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند. اگر O مرکز دایره باشد، این بردارها را بسازید:

$$\mathbf{x}=\vec{OA}+\vec{OB},\quad \mathbf{y}=\vec{OB}+\vec{OC},$$
$$\mathbf{z}=\vec{OC}+\vec{OA},\quad \mathbf{t}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$$

۱۵۷. گرانیگاه مثلث ABC (یعنی نقطهٔ برخورد میانه‌های آن) G می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{۰} \qquad (۱)$$

آیا عکس این قضیه درست است، یعنی اگر برای نقطهٔ G واقع در درون مثلث ABC، برابری (۱) را داشته باشیم، آیا نقطهٔ G در برخورد میانه‌ها قرار دارد؟

۱۵۸. قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را با $\mathbf{a}=\overrightarrow{AC}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{BD}$ نشان می‌دهیم. بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}$ را برحسب $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بنویسید.

*۱۵۹. نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1 و E_1 روی یک صفحه‌اند، به‌نحوی که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نیستند. پنج‌ضلعی $ABCDE$ را طوری بسازید که، نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1 و E_1 وسط ضلع‌های آن باشند.

*۱۶۰. ثابت کنید، نقطه‌های وسط دو قاعدهٔ ذوزنقه و نقطهٔ برخورد خط‌های راستی که از دو ساق می‌گذرند، روی یک خط راست واقع‌اند.

۱۶۱. دستگاهی شامل دو معادلهٔ خطی دومجهولی داده شده است:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

دربارهٔ بردارهای $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$، $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ و $\mathbf{c}=(c_1,c_2)$ چه می‌توان گفت، اگر

الف) دستگاه (۱) جوابی منحصر داشته باشد؛

ب) دستگاه (۱) جواب نداشته باشد؛

ج) دستگاه (۱) دارای بی‌نهایت جواب باشد؟

*۱۶۲. از مرکز یک nضلعی منتظم، خط راستی گذرانده‌ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های راس‌هایی که در یک طرف خط راست قرار دارند، تا این خط راست، برابر است با مجموع فاصله‌های راس‌های طرف دیگر خط راست تا آن.

*۱۶۳. ثابت کنید، در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مجذورهای دو قطر، برابر است با مجموع مجذورهای چهار ضلع.

۱۶۴. مجموع مجذورهای طول‌های سه ضلع مثلث معلوم است. مجموع مجذورهای طول‌های میانه‌های آن را پیدا کنید.

۱۶۵. پاره‌خط‌های راست AB و CD مفروض‌اند و می‌دانیم:

$$|AC|^۲ - |BC|^۲ = |AD|^۲ - |BD|^۲$$

ثابت کنید، خط‌های راست AB و CD، بر هم عمودند.

۶. ماتریس ـ دترمینان

§۱. ورود به مطلب

۱. در متن‌های ریاضی که از قوم‌ها و ملت‌های باستانی باقی مانده و بیشتر مربوط به خاورزمین، یعنی ایران، مصر، سرزمین میان‌دورود (یا بابِل)، چین و ... است، برای انجام محاسبه‌های ریاضی و برای این‌که ناچار نباشند، هر بار عمل‌های ضرب و توان و جذر و غیره را پیش خود تکرار کنند، جدول‌هایی درست کرده و، در آن‌ها، نتیجهٔ عمل‌های لازم مربوط به عددهای مختلف را ثبت کرده بودند و، برای رفع نیازهای محاسبه‌ای خود، به آن‌ها مراجعه می‌کردند. سندهایی از هزاره‌های پیش از میلاد در سرزمین «میان‌دورود» (که عرب‌ها به آن بین‌النهرین می‌گویند؛ یعنی بین رودهای دجله و فرات) به‌دست آمده است که، در هرکدام، به صورت جدول، یک عمل ریاضی دربارهٔ عددهای مختلف، نوشته شده است: جدول‌ضرب عددها، جدول مجذور عددها، جدول جذر عددها و غیره.

در مرحله‌های پیش رفته‌تر و مثلاً در سده‌های نهم تا پانزدهم میلادی در ایران و یا از سدهٔ پانزدهم میلادی به بعد در اروپای غربی، تلاش‌هایی

در جهت جمع‌وجور کردن جدول‌ها و جا دادن همهٔ آگاهی‌های لازم در یک جدول انجام شد و، بعد از پیدایش امکان چاپ، کتاب‌های زیاد و مختلفی منتشر شد که تنها شامل جدول‌های عددی بودند. این جدول‌ها به‌ویژه به‌کار اخترشناسان می‌آمد که، در محاسبه‌های خود، نیاز به عمل‌های طولانی و ملال‌آور روی عددها داشتند.

ساده‌ترین این جدول‌ها، جدول‌ضرب است که، به احتمال زیاد، با آن آشنا هستید و هنوز در بسیاری از دبستان‌ها، برای یادگیری ضرب عدهای یک‌رقمی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تا پیش از پیدایش ماشین‌های حساب و رایانه‌ها، کتاب‌های جدول می‌توانستند نیازهای مهندسان، اخترشناسان و دیگر کسانی را که با محاسبه‌های عددی سروکار دارند، برآورند: جدول لگاریتم عددها، جدول مقدار خط‌های مثلثاتی و حتا جدول مربوط به عمل‌های عادی‌تر روی عددها.

با این‌که رایانه‌ها، کار محاسبه را بسیار سریع و ساده کرده‌اند، هنوز هم، بسیاری از این جدول‌ها را می‌توان روی میز کسانی که با محاسبه سروکار دارند، پیدا کرد. نمونهٔ بسیار کوچکی از این‌گونه جدول‌ها را در صفحهٔ ۱۹۳ آورده‌ایم تا هم با شیوهٔ تنظیم آن‌ها آشنا شوید و هم، به احتمالی، در برخی محاسبه‌ها بتواند به شما کمک کند. در این جدول منظور از e، مبنای لگاریتم طبیعی است که به آن، عدد نِپِر هم می‌گویند و منظور از $\lg n$، لگاریتم عدد n در مبنای ۱۰ است (لگاریتم دهدهی $\log_{۱۰} n$).

۲. همان‌طور که می‌بینید، جدول، برای کوتاه کردن کار محاسبه و، درضمن، کوتاه‌تر کردن نوشته‌ها است. با چند مثال که گونهٔ دیگری از جدول را به ما می‌شناساند، آشنا می‌شویم.

الف) **مختصات یک نقطه در صفحه.** نقطهٔ A را در صفحهٔ محورهای

$n =$ عدد	$\frac{۱}{n}$	$n^۲$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[۳]{n}$	$\lg n$
۲	۰/۵	۴	۱/۴۱۴	۱/۲۶۰	۰/۳۰۱۰
۳	۰/۳۳۳	۹	۱/۷۳۲	۱/۴۴۲	۰/۴۷۷۱
۴	۰/۲۵	۱۶	۲	۱/۵۸۷	۰/۶۰۲۱
۵	۰/۲	۲۵	۲/۲۳۶	۱/۷۱۰	۰/۶۹۹۰
۶	۰/۱۶۷	۳۶	۲/۴۴۹	۱/۸۱۷	۰/۷۷۸۲
۷	۰/۱۴۳	۴۹	۲/۶۴۶	۱/۹۱۳	۰/۸۴۵۱
۸	۰/۱۲۵	۶۴	۲/۸۲۸	۲	۰/۹۰۳۱
۹	۰/۱۱۱	۸۱	۳	۲/۰۸۰	۰/۹۵۴۲
۱۰	۰/۱	۱۰۰	۳/۱۶۲	۲/۱۵۴	۱
۱۱	۰/۰۹۱	۱۲۱	۳/۳۱۷	۲/۲۲۴	۱/۰۴۱۴
۱۲	۰/۰۸۳	۱۴۴	۳/۴۶۴	۲/۲۸۹	۱/۰۷۹۲
۱۳	۰/۰۷۷	۱۶۹	۳/۶۰۶	۲/۳۵۱	۱/۱۱۳۹
۱۴	۰/۰۷۱	۱۹۶	۳/۷۴۲	۲/۴۱۰	۱/۱۴۶۱
۱۵	۰/۰۶۷	۲۲۵	۳/۸۷۳	۲/۴۶۶	۱/۱۷۶۱
$\pi \approx$ ۳/۱۴۱۶	۰/۳۱۸۳	۹/۸۶۹۶	۱/۷۷۲۵	۱/۴۶۴۶	۰/۴۹۷۱
$e \approx$ ۲/۷۱۸۳	۰/۳۶۷۹	۷/۳۸۹۱	۱/۶۴۷۸	۱/۳۹۵۶	۰/۴۳۴۳

مختصات در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم طولی بر ۳ و عرضی برابر ۲ داشته باشد، یعنی $x_A =$ ۳ و $y_A =$ ۲.

شما می‌دانید، به‌جای این نوشتهٔ کم‌وبیش طولانی برای معرفی نقطهٔ A، می‌توانستیم بنویسیم:

$$A \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۲ \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad A(۳, ۲)$$

و یا آن‌طور که در بسیاری کتاب‌ها معمول شده است:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = [۳, ۲] \qquad (۱)$$

با نوشتن یکی از این نمادها (که هرکدام، به نوعی یک جدول کوچک به حساب می‌آیند)، خود را از نوشتن آن شرح دراز، آزاد کرده‌اید.

ب) **معرفی پاره‌خط راست.** اگر پاره‌خط راست AB با معلوم بودن $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داده شده‌باشد، می‌توان پاره‌خط راست AB را این‌وط معرفی کرد:

$$AB \text{ پاره‌خط راست} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ج) **معرفی مثلث.** اگر نقطه‌های A و B و C، روی صفحه محورهای مختصات، به‌ترتیب، با مختصات $A(a, b)$، $B(c, d)$ و $C(e, f)$ داده شده باشد، برای مثلث با راس‌های A، B و C می‌توان نوشت:

$$ABC \text{ مثلث} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \qquad (3)$$

برای جدول‌هایی به‌صورت (۱)، (۲) یا (۳) و یا به‌طور کلی، هر جدولی از عددها، به شرطی که این عددها با رابطه‌ای به هم مربوط باشند، نامی انتخاب کرده‌اند: **ماتریس.** درضمن هر عدد از جدول را، یک **عنصر** یا یک **درایه** از ماتریس گویند.

تنها یادآوری می‌کنیم که، درایه‌های ماتریس ممکن است هر چیز دیگری، غیر از عدد هم باشند. ولی در این بخش، تنها با ماتریس‌هایی کار می‌کنیم که درایه‌های آن‌ها، عدد باشند.

§۲. تعریف ماتریس‌ها و گونه‌های مختلف آن

۱. **ماتریس یعنی چه؟** *به هر جدول مستطیلی شکل که دارای چند سطر و چند ستون باشد، ماتریس گویند.* وقتی ماتریس دارای m سطر و n ستون

باشد، به آن ماتریس $m \times n$ (m در n) گویند. ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ دارای دو سطر و یک ستون است (ماتریس ۱ × ۲). ماتریس [۲, ۳]، یک سطر و دو ستون دارد (ماتریس ۲ × ۱). ماتریس

$$\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{bmatrix}$$

دارای دو سطر و دو ستون است (ماتریس ۲ × ۲). ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

دو سطر و سه ستون دارد (ماتریس ۳ × ۲).

ماتریس‌ها را به‌صورت‌های مختلف می‌نویسند. مثلاً ماتریس (۲) را می‌توان به هریک از این صورت‌ها نوشت:

$$\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{pmatrix} \text{ یا } \begin{Vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{Vmatrix}$$

۲. ماتریس ستونی و ماتریس سطری. ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد، یعنی ماتریس $m \times ۱$، **ماتریس ستونی** نامیده می‌شود، مثل ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۰ \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

و ماتریس‌هایی را که تنها یک سطر داشته باشند، **ماتریس سطری** می‌نامند، مثل

$$[۳, ۲], \quad [a, b, c], \quad [x, y, ۰, z]$$

ماتریسی را که یک سطر و یک ستون داشته باشد. همان عدد داخل علامت ماتریس به حساب می‌آورند.

$$[-۳] = -۳, \quad [x] = x$$

۳. عنصرهای تشکیل‌دهندهٔ ماتریس. ماتریس می‌تواند شامل هر چیزی باشد (عدد، تابع، بردار، ...)، ولی ما در این‌جا تنها با ماتریس‌هایی کار می‌کنیم که شامل عددهای حقیقی باشند. درواقع، در این بخش،ماتریس را به معنای نوعی آرایش از عددهای حقیقی گرفته‌ایم.

هر عددی (یا در حالت کلی، هر چیزی) را که وارد ماتریس شده باشد، یک **درایه** (یا گاهی یک **عنصر**) گویند. ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ دارای چهار درایه است (۱، ۲−، ۳− و ۴)، ۱ و ۲− درایه‌های ستون اول و ۳− و ۴ درایه‌های ستون دوم‌اند. به همین ترتیب، ۱ و ۳− درایه‌های سطر اول و ۲− و ۴ درایه‌های سطر دوم ماتریس را تشکیل می‌دهند.

ماتریس، به معنای *قالب* است و برخی از نویسندگان، برای هم‌ارز فارسی آن، **زهدان** را به‌کار برده‌اند.

۴. ماتریس مربعی. اگر در یک ماتریس، تعداد سطرها، با تعداد ستون‌ها برابر باشد، آن را **ماتریس مربعی** گویند، مثل ماتریس‌های

$$\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \text{ یا } \begin{pmatrix} ۱ & -۴ & -۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۲ \end{pmatrix}$$

مثال ۱. هر مربع وفقی، یک ماتریس مربعی است. در شکل ۲۸، دو

مربع وفقی (دو ماتریس مربعی) داده شده است.

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

(۱)

۵۱	۲	۳۷
۱۶	۳۰	۴۴
۲۳	۵۸	۹

(۲)

شکل ۲۸

که در آن‌ها را، به‌صورت شکل ۲۹ هم می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۲ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۵۱ & ۲ & ۳۷ \\ ۱۶ & ۳۰ & ۴۴ \\ ۲۳ & ۵۸ & ۹ \end{bmatrix} \quad (۲)$$

شکل ۲۹

یادداشت. مربع وفقی، به ماتریسی مربعی گویند که، در آن، مجموع عددهای هر سطر، با مجموع عددهای هر ستون و با مجموع عددهای هر قطر، برابر باشند. این مجموع ثابت، در مربع وفقی (۱) برابر ۱۵ و در مربع وفقی (۲) برابر ۹۰ است. مربع وفقی را، *مربع سحری* یا *مربع جادویی* هم می‌گویند.

۳§. عمل با ماتریس‌ها

۱. مجموع دو ماتریس هم‌مرتبه. مجموع دو ماتریس، وقتی معنا دارد که، در آن‌ها، هم تعداد سطرها و هم تعداد ستون‌ها، با یکدیگر برابر باشند، یعنی ماتریس $m \times n$ را با ماتریسی می‌توان جمع کرد که $m \times n$ باشد، به‌نحوی که هردوی آن‌ها دارای m سطر و n ستون باشند. در این صورت، بنابرتعریف، *مجموع دو ماتریس هم، یک ماتریس $m \times n$ است که، هر درایهٔ آن، برابر مجموع درایه‌های نظیر در دو ماتریس باشد.*

مثال ۲. *ماتریس‌های (۱) و (۲) در شکل ۲۹ را با هم جمع کنید.*

حل. هر دو ماتریس (۱) و (۲)، ۳ × ۳ هستند و، بنابراین، می‌توان آن‌ها را با هم جمع کرد:

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵۱ & ۲ & ۳۷ \\ ۱۶ & ۳۰ & ۴۴ \\ ۲۳ & ۵۸ & ۹ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۸+۵۱ & ۱+۲ & ۶+۳۷ \\ ۳+۱۶ & ۵+۳۰ & ۷+۴۴ \\ ۴+۲۳ & ۹+۵۸ & ۲+۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۹ & ۳ & ۴۳ \\ ۱۹ & ۳۵ & ۵۱ \\ ۲۷ & ۶۷ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

توجه می‌کنید: از مجموع دو مربع وفقی، یک مربع وفقی جدید به‌دست می‌آید. در مربع وفقی مجموع، مقدار ثابت (یعنی مجموع هر سطر، هر ستون یا هر قطر) برابر است با مجموع مقدارهای ثابت دو ماتریسی که با هم جمع کردیم، یعنی ۹۰ + ۱۵ یا ۱۰۵.

به همین ترتیب، دو ماتریس (۱) و (۲) را می‌توان از هم کم کرد. اگر ماتریس (۱) را از ماتریس (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۵۱-۸ & ۲-۱ & ۳۷-۶ \\ ۱۶-۳ & ۳۰-۵ & ۴۴-۷ \\ ۲۳-۴ & ۵۸-۹ & ۹-۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۳ & ۱ & ۳۱ \\ ۱۳ & ۲۵ & ۳۷ \\ ۱۹ & ۴۹ & ۷ \end{bmatrix}$$

نتیجهٔ تفریق، یک مربع وفقی با مقدار ثابت ۷۵ است.

یادداشت. یک ماتریس را می‌توان به مجموع چند ماتریس و یا تفاضل دو ماتریس، به صورت دلخواه، تبدیل کرد. مثلاً

$$\begin{bmatrix} ۵۱ & ۲ & ۳۷ \\ ۱۶ & ۳۰ & ۴۴ \\ ۲۳ & ۵۸ & ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۹+۲ & -۳+۵ & ۲۹+۸ \\ ۱۳+۳ & ۲۴+۶ & ۳۵+۹ \\ ۱۹+۴ & ۵۱+۷ & -۱+۱۰ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۴۹ & -۳ & ۲۹ \\ ۱۳ & ۲۴ & ۳۵ \\ ۱۹ & ۵۱ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۹ \\ ۴ & ۷ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

ولی همان‌طور که می‌بینید، همیشه از تجزیهٔ یک مربع وفقی به مجموع دو ماتریس، لازم نیست مربع‌های وفقی به‌دست آید.

۲. ضرب عدد در ماتریس. *برای ضرب یک عدد در یک ماتریس، بنابرتعریف، باید عدد را در هریک از درایه‌های ماتریس ضرب کرد.* فرض کنید بخواهیم ماتریس (۱) در شکل ۲۹ را در ۶ ضرب کنیم (یعنی، ۶ برابر ماتریس را به‌دست آوریم). اگر ماتریس (۱) را M بنامیم، داریم:

$$۶M = \begin{bmatrix} ۶\times۸ & ۶\times۱ & ۶\times۶ \\ ۶\times۳ & ۶\times۵ & ۶\times۷ \\ ۶\times۴ & ۶\times۹ & ۶\times۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۸ & ۶ & ۳۶ \\ ۱۸ & ۳۰ & ۴۲ \\ ۲۴ & ۵۴ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

یادداشت. از ضرب ماتریس (۱) (که یک مربع وفقی بود) در ۶، مربعی وفقی به‌دست آمد که، در آن، مجموع هر سطر، هر ستون و هر قطر آن، برابر ۹۰ (۱۵×۶) است. ماتریس (۲) در شکل ۲۹ هم، یک مربع وفقی با همین مقدار ثابت ۹۰ است. ولی عددهای این دو ماتریس به‌کلی با هم فرق دارند. مربع‌های وفقی با مقدارهای برابر (در هر سطر، ستون و قطر)، لازم نیست بر هم منطبق باشند. درواقع، بی‌نهایت مربع وفقی می‌توان ساخت که، مجموع هر سطر، هر ستون و هر قطر آن، مثلاً برابر ۹۰ باشد. به‌عنوان نمونه، ماتریس مربعی

$$\begin{bmatrix} ۵۱ & ۲+a & ۳۷-a \\ ۱۶-a & ۳۰ & ۴۴+a \\ ۲۳+a & ۵۸-a & ۹ \end{bmatrix}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی a، یک مربع وفقی با مجموع ثابت ۹۰ است.

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها

ماتریس‌های A، B و C را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، همهٔ آن‌ها $m \times n$ باشند، یعنی در آن‌ها تعداد سطرها با هم و تعداد ستون‌ها با هم برابر باشند، در این صورت

الف) $A + B = B + A$ (ویژگی جابه‌جایی)؛

ب) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (ویژگی شرکت‌پذیری)؛

ج) اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌وقت

$$a(A+B) = aA + aB;$$
$$(a+b)A = aA + bA$$

د) مجموع دو ماتریس قرینه (یعنی دو ماتریسی که همهٔ درایه‌های نظیر در آن‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند)، ماتریسی است با همهٔ درایه‌های برابر صفر.

$$\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

به‌چنین ماتریسی، *ماتریس صفر* گویند و، آن را، با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهند.

مثال ۳. *ماتریسی بنویسید که برابر باشد با*

$$A = ۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۵ & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۲ & ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱۵ & -۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۸ & -۲ \\ ۲ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۴. *ماتریس B را پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:*

$$۲B+\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۸ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}-۳B$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۲B+۳B=\begin{bmatrix} -۱ & -۸ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix};$$

$$۵B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱۱}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$$

۳. ضرب ماتریس‌ها. در آغاز یک قرارداد و یک تعریف را می‌پذیریم.

قرارداد. دو ماتریس، یکی ماتریس سطری A (ماتریس $۱ \times n$) و دیگری ماتریس ستونی B (ماتریس $n \times ۱$) در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. در این‌صورت حاصل‌ضرب $A \times B$ برابر است با یک عدد (یا یک درایه).

اگر درایه‌های ماتریس سطری A را $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و درایه‌های ماتریس ستونی B را $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n، بنامیم، حاصل‌ضرب $A \times B$ برابر است با عدد

$$a_۱b_۱+a_۲b_۲+\ldots+a_nb_n$$

مثال ۵. *حاصل‌ضرب $A \times B$ را پیدا کنید، به‌شرطی که*

$$A=[\sin^۲\alpha \quad \cos^۲\alpha \quad -\sin^۴\alpha],\quad B=\begin{bmatrix} \sin^۶\alpha \\ \cos^۶\alpha \\ ۲\cos^۴\alpha \end{bmatrix}$$

حل. داریم:

$$A \times B = \sin^{۲} \alpha \cdot \sin^{۶} \alpha + \cos^{۲} \alpha \cdot \cos^{۶} \alpha +$$
$$+(-\sin^{۴} \alpha)(۲ \cos^{۴} \alpha) = \sin^{۸} \alpha + \cos^{۸} \alpha - ۲ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha$$
$$= [(\sin^{۴} \alpha + \cos^{۴} \alpha)^{۲} - ۲ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha] - ۲ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha$$
$$= (\sin^{۴} \alpha + \cos^{۴} \alpha)^{۲} - ۴ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha =$$
$$= [(\sin^{۲} \alpha + \cos^{۲} \alpha)^{۲} - ۲ \sin^{۲} \alpha \cos^{۲} \alpha]^{۲} - ۴ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha$$
$$= (۱ - ۲ \sin^{۲} \alpha \cos^{۲} \alpha)^{۲} - ۴ \sin^{۴} \times \cos^{۴} \alpha =$$
$$= (۱ - ۴ \sin^{۲} \alpha \cos^{۲} \alpha + ۴ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha) - ۴ \sin^{۴} \alpha \cos^{۴} \alpha$$
$$= ۱ - ۴ \sin^{۲} \alpha \cos^{۲} \alpha = ۱ - (۲ \sin \alpha \cos \alpha)^{۲} = ۱ - \sin^{۲} ۲\alpha$$

تاکید می‌کنیم: حاصل‌ضرب ماتریس $n \times ۱$ در ماتریس $۱ \times n$، یک عدد (یا یک درایه) است، نه یک ماتریس.

به‌این تعریف هم، که حالت خاصی از یک ماتریس مربعی است، توجه کنید:

ماتریس واحد. هر ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های قطر اصلی آن (قطری که از گوشهٔ چپ و بالا به گوشهٔ راست پایین می‌رود)، برابر واحد و همهٔ درایه‌های دیگر آن برابر ۰ باشند، **ماتریس واحد** (**یا ماتریس همانی**) نامیده می‌شود، مثل ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس واحد را با I نشان می‌دهند.

اکنون می‌توانیم، با تعریف ضرب دو ماتریس آشنا شویم.

در آغاز یادآوری می‌کنیم، اگر A و B دو ماتریس باشند، تنها وقتی می‌توان $A \times B$ (یا AB) را تعریف کرد که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد، یعنی A ماتریسی $m \times n$ و B به‌صورت ماتریس $n \times p$ باشد.

۱) ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس. فرض کنید:

$$A = [a \quad b \quad c] \text{ و } B = \begin{bmatrix} x & t \\ y & u \\ z & v \end{bmatrix}$$

و بخواهیم، حاصل‌ضرب AB را پیدا کنیم (همان‌طور که می‌بینید، ماتریس A سه ستون و ماتریس B سه سطر دارد. تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر است).

ستون‌های ماتریس B را از هم جدا می‌کنیم و دو ماتریس ستونی تشکیل می‌دهیم:

$$B_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ و } B_2 = \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

بنابرتعریف، حاصل‌ضرب ماتریس سطری A در ماتریس B، برابر است با یک ماتریس سطری که، درایه‌های آن عبارتند از AB_1 و AB_2 (به یاد دارید که AB_1 و AB_2 عددند):

$$AB = [AB_1 \quad AB_2];$$

$$AB_1 = [a \quad b \quad c] \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz,$$

$$AB_۲ = [a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = at + bu + cv,$$

$$AB = [ax + by + cz \quad at + bu + cv]$$

توجه کنید، از ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس (به‌شرطی که تعداد ستون‌های ماتریس سطری، با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد)، یک ماتریس سطری است، نه یک عدد؛ تعداد درایه‌های حاصل‌ضرب برابر است با تعداد ستون‌های ماتریس غیرسطری.

مثال ۶. می‌دانیم

$$A = [\sin\alpha \quad \cos\alpha] \text{ و } B = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \frac{۱}{\sin\alpha} \\ \cos\alpha & \frac{۱}{\cos\alpha} \end{bmatrix}$$

مطلوب است ماتریس حاصل‌ضرب AB.

حل.

$$A \times B = [\sin\alpha \quad \cos\alpha] \times \begin{bmatrix} \sin\alpha & \frac{۱}{\sin\alpha} \\ \cos\alpha & \frac{۱}{\cos\alpha} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[[\sin\alpha \quad \cos\alpha] \times \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \quad [\sin\alpha \quad \cos\alpha] \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sin\alpha} \\ \frac{۱}{\sin\alpha} \end{bmatrix} \right] =$$

$$= [\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha \quad \sin\alpha \cdot \frac{۱}{\sin\alpha} + \cos\alpha \cdot \frac{۱}{\cos\alpha}] = [۱ \quad ۲]$$

مثال ۷. مطلوب است محاسبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب $A \times B$، به‌شرطی که

$$A = [a \quad b \quad c] \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

B ماتریس واحد ۳ × ۳ است.

حل. درایه‌های ماتریس حاصل‌ضرب را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درایهٔ اول} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = a \times ۱ + b \times ۰ + c \times ۰ = a;$$

$$\text{درایهٔ دوم} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = a \times ۰ + b \times ۱ + c \times ۰ = b;$$

$$\text{درایهٔ سوم} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = a \times ۰ + b \times ۰ + c \times ۱ = c$$

به این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$[a \quad b \quad c] \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = [a \quad b \quad c]$$

از ضرب هر ماتریس سطری در یک ماتریس واحد (به‌شرطی که این ضرب معنا داشته باشد، یعنی تعداد درایه‌های ماتریس سطری با تعداد سطرهای ماتریس واحد برابر باشد)،برابر است با همان ماتریس سطری.

۲) **حاصل‌ضرب یک ماتریس در ماتریس ستونی.** حاصل‌ضرب یک

ماتریس در یک ماتریس ستونی، یک ماتریس ستونی است. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(توجه کنید: تعداد ستون‌های ماتریس A را با تعداد سطرهای ماتریس B برابر گرفتیم تا ضرب معنا پیدا کنند.)

اگر از ماتریس A، سطرها را جدا کنیم و سه ماتریس سطری زیر را در نظر بگیریم:

$$A_1 = [a \quad b], \quad A_2 = [c \quad d], \quad A_3 = [e \quad f]$$

آن‌وقت، بنابه‌تعریف

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \end{bmatrix}$$

به یاد داریم که A_1B، A_2B و A_3B (حاصل‌ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی ـ اگر ممکن باشد ـ یک عدد است).

$$A_1B = [a \quad b] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax + by,$$

$$A_2B = [c \quad d] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = cx + dy,$$

$$A_3B = [e \quad f] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ex + fy$$

بنابراین

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{bmatrix}$$

تعداد درایه‌ها در ماتریس ستونی حاصل‌ضرب، برابر است با تعداد سطرها در ماتریس A.

مثال ۸. *مطلوب است حاصل‌ضرب* $A \times B$*، به‌شرطی که*

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

حل. فرض می‌کنیم: $A \times B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. باید داشته باشیم:

$$x = [۱ \quad ۰ \quad ۰] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \times ۱ + b \times ۰ + c \times ۰ = a,$$

$$y = [۰ \quad ۱ \quad ۰] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \times ۰ + b \times ۱ + c \times ۰ = b,$$

$$z = [۰ \quad ۰ \quad ۱] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \times ۰ + b \times ۰ + c \times ۱ = c$$

بدین ترتیب

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

از ضرب ماتریس واحد ۳×۳ در ماتریس ستونی B، همان ماتریس B به‌دست آمد.

۳) **حاصل‌ضرب دو ماتریس.** فرض می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{bmatrix}$$

باز هم تعداد ستون‌های ماتریس A را با تعداد سطرهای ماتریس B برابر گرفتیم تا ضرب معنا داشته باشد.

حاصل‌ضرب $A \times B$، ماتریسی است دارای دو سطر (تعداد سطرهای A) و سه ستون. (تعداد ستون‌های B). درایه‌های ماتریس حاصل‌ضرب، به این ترتیب به‌دست می‌آید:

سطر اول A را یک ماتریس سطری می‌گیریم. از ضرب این ماتریس سطری در هریک از سه ماتریس ستونی جدا شده از B، درایه‌های سطر اول حاصل‌ضرب به‌دست می‌آید:

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = ax + bt, \qquad (۱)$$

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = ay + bu, \qquad (۲)$$

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = az + bv \qquad (۳)$$

مقدارهای (۱) و (۲) و (۳)، به‌ترتیب، مُعرف درایه‌های سطر اول $A \times B$ (از چپ به راست) هستند.

به‌همین ترتیب، ضرب ماتریسی سطری که شامل سطر دوم ماتریس A است در هریک از ماتریس‌های ستونی جدا شده، از B، درایه‌های سطر دوم حاصل‌ضرب را می‌دهد:

$$[c \quad d]\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = cx + dt,$$

$$[c \quad d]\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = cy + du,$$

$$[c \quad d]\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = cz + dv$$

به‌این ترتیب، برای حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B، به‌دست می‌آید:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ax + bt & ay + bu & az + bv \\ cx + dt & cy + du & cz + dv \end{bmatrix}$$

توجه کنید: در این مثال، نمی‌توانیم جای A و B را عوض کنیم. $B \times A$ معنا ندارد، زیرا تعداد ستون‌ها ماتریس B با تعداد سطرهای ماتریسی A برابر نیست. **ضرب ماتریس‌ها، دارای ویژگی جابه‌جایی نیست.**

مثال ۹. *ماتریس مربعی واحد و ماتریس* $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ مفروض است. *مطلوب است* $I \times A$ و $A \times I$.

حل. با محاسبهٔ حاصل‌ضرب

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\left.\begin{aligned} [۱ \quad ۰]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= ۱ \times a + ۰ \times b = a \\ [۱ \quad ۰]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= ۱ \times c + ۰ \times d = c \end{aligned}\right\} \text{درایه‌های سطر اول}$$

$$\left.\begin{aligned} [۰ \quad ۱]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= ۰ \times a + ۱ \times b = b \\ [۰ \quad ۱]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= ۰ \times c + ۱ \times d = d \end{aligned}\right\} \text{ریز درایه‌های سطر دوم}$$

بنابراین

$$I \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = A$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$A \times I = A$$

I، یعنی ماتریس واحد، عنصر بی‌اثر در عمل ضرب است و از ضرب آن در هر ماتریسی (به‌شرطی که عمل ضرب ممکن باشد)، خود همان ماتریس به‌دست می‌آید.

مثال ۱۰. $A \times B$ و $B \times A$ را محاسبه کنید، به‌شرطی که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل. برای حاصل‌ضرب $A \times B$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} [۱ \quad ۰]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} &= ۱ \times ۲ + ۰ \times ۴ = ۲ \\ [۱ \quad ۰]\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} &= ۱ \times ۳ + ۰ \times ۵ = ۳ \end{aligned}\right\} \text{درایه‌های سطر اول حاصل‌ضرب}$$

$$\left.\begin{aligned} [-۲ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} &= -۲ \times ۲ - ۱ \times ۴ = -۸ \\ [-۲ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} &= -۲ \times ۳ - ۱ \times ۵ = -۱۱ \end{aligned}\right\} \text{درایه‌های سطر دوم حاصل‌ضرب}$$

بنابراین

$$A \times B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۸ & -۱۱ \end{bmatrix}$$

و برای حاصل‌ضرب $B \times A$:

$$\left.\begin{aligned}
&[۲ \quad ۳]\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = ۲ \times ۱ - ۳ \times ۲ = -۴ \\
&[۲ \quad ۳]\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۲ \times ۰ - ۳ \times ۱ = -۳
\end{aligned}\right\} \text{سطر اول حاصل‌ضرب}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[۴ \quad ۵]\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = ۴ \times ۱ - ۵ \times ۲ = -۶ \\
&[۴ \quad ۵]\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۴ \times ۰ - ۵ \times ۱ = -۵
\end{aligned}\right\} \text{سطردوم حاصل‌ضرب}$$

بنابراین

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ -۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید $A \times B$ با $B \times A$ فرق دارد. در ضرب ماتریس‌ها، ویژگی جابه‌جایی وجود ندارد:

$$A \times B \neq B \times A$$

به‌همین مناسبت، نمی‌توان مفهومی برای تقسیم ماتریس‌ها پیدا کرد.

مثال ۱۱. *حاصل‌ضرب‌های AB و BA را پیدا کنید، به‌شرطی که*

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

حل. برای $A \times B$ داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ \times ۱ - ۱ \times ۲ & ۲ \times ۵ - ۱ \times ۱۰ \\ ۴ \times ۱ - ۲ \times ۲ & ۴ \times ۵ - ۲ \times ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \overline{O};$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۱ \times ۲ + ۵ \times ۴ & ۱ \times -۱ + ۵ \times -۲ \\ ۲ \times ۲ + ۱۰ \times ۴ & ۲ \times -۱ + ۱۰ \times -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۲ & -۱۱ \\ ۴۴ & -۲۲ \end{bmatrix}$$

که از آن، دو نتیجه به‌دست می‌آید:

۱) گرچه حاصل‌ضرب هر ماتریس در ماتریس صفر (اگر ضرب ممکن باشد)، برابر صفر است، ولی عکس آن درست نیست، یعنی ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس برابر صفر شود، در حالی که هیچ‌کدام از آن‌ها، ماتریس صفر نباشد. ماتریس‌های A و B، ماتریس‌های صفر نیستند، ولی حاصل‌ضرب AB، برابر ماتریس صفر شده است.

۲) یک بار دیگر تایید شد که همیشه AB با BA برابر نیست.

مثال ۱۲. *از این برابری، x و y را پیدا کنید:*

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a-۱ & a+۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲(a^۲-۱) \end{bmatrix}$$

حل. حاصل‌ضرب دو ماتریس سمت چپ برابری، یک ماتریس ستونی است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a-۱ & a+۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ (a-۱)x+(a+۱)y \end{bmatrix}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} x-y \\ (a-۱)x+(a+۱)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲(a^۲-۱) \end{bmatrix}$$

دو ماتریس ستونی وقتی برابرند که: ۱) تعداد سطرهای آن‌ها برابر باشد و ۲) هر سطر ماتریس اول با سطر نظیر خود در ماتریس دوم برابر باشد. بنابراین

$$\begin{cases} x-y=۲ \\ (a-۱)x+(a+۱)y=۲(a^۲-۱) \end{cases}$$

و این، دستگاهی است شامل دو معادلهٔ دومجهولی، با مجهول‌های x و y.

پاسخ. $x = a + ۱$ و $y = a - ۱$.

۴. ماتریس وارون. به‌طور کلی وارون ماتریس A، ماتریسی است که از ضرب آن در A، ماتریس واحد به‌دست آید. وارون ماتریس A را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند.

پیدا کردن ماتریس وارون، در حالت کلی، دشواری‌هایی دارد. در این‌جا، تنها راه پیدا کردن وارون ماتریس ۲×۲ را، بدون استدلال، می‌آوریم.

ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس وارون آن، چنین است:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{ab' - ba'} \begin{bmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{b'}{ab' - ba'} & -\frac{b}{ab' - ba'} \\ -\frac{a'}{ab' - ba'} & \frac{a}{ab' - ba'} \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

مثال ۱۳. ثابت کنید: $B = A^{-۱}$، به‌شرطی که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \text{ و } B = \frac{۱}{۸} \begin{bmatrix} ۱۶ & -۸ & -۸ \\ -۶ & ۲ & ۶ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

حل. برای سادگی کار، در آغاز $A \times ۸B$ (هشت برابر AB) را محاسبه می‌کنیم و، سپس $\frac{۱}{۸}$ آن را به‌دست می‌آوریم. درایه‌های سطر اول حاصل‌ضرب $۸AB$، به‌ترتیب چنین‌اند:

$$۱)\ [۱ \quad ۲ \quad ۴] \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۶ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱ \times ۱۶ - ۲ \times ۶ + ۴ \times ۱ = ۸,$$

$$۲)\ [۱\quad ۲\quad ۴]\begin{bmatrix} -۸ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = -۱\times ۸ + ۲\times ۲ + ۴\times ۱ = ۰,$$

$$۳)\ [۱\quad ۲\quad ۴]\begin{bmatrix} -۸ \\ ۶ \\ -۱ \end{bmatrix} = -۱\times ۸ + ۲\times ۶ - ۴\times ۱ = ۰$$

درایه‌های سطر دوم ماتریس حاصل‌ضرب

$$۱)\ [۰\quad ۱\quad ۶]\begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۶ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰\times ۱۶ - ۱\times ۶ + ۶\times ۱ = ۰,$$

$$۲)\ [۰\quad ۱\quad ۶]\begin{bmatrix} -۸ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰\times -۸ + ۱\times ۲ + ۶\times ۱ = ۸,$$

$$۳)\ [۰\quad ۱\quad ۶]\begin{bmatrix} -۸ \\ ۶ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰\times -۸ + ۱\times ۶ - ۶\times ۱ = ۰,$$

و سرانجام، درایه‌های سطر سوم ماتریس حاصل‌ضرب

$$۱)\ [۱\quad ۳\quad ۲]\begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۶ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱\times ۱۶ - ۳\times ۶ + ۲\times ۱ = ۰,$$

$$۲)\ [۱\quad ۳\quad ۲]\begin{bmatrix} -۸ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱\times -۸ + ۳\times ۲ + ۲\times ۱ = ۰,$$

$$۳)\ [۱\quad ۳\quad ۲]\begin{bmatrix} -۸ \\ ۶ \\ -۱ \end{bmatrix} = -۱\times ۸ + ۳\times ۶ - ۲\times ۱ = ۸$$

به‌این ترتیب

$$\text{۸}AB = \begin{bmatrix} \text{۸} & \text{۰} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۸} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۸} \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۰} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۱} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۱} \end{bmatrix} = I$$

ماتریس B وارون ماتریس A (یا ماتریس A وارون ماتریس B) است و بنابراین

$$B = A^{-\text{۱}}$$

مثال ۱۴. *مطلوب است $A^{-\text{۱}}$ (وارون A) به‌شرطی که*

$$A = \begin{bmatrix} \tan\alpha & -\sin\alpha \\ \cot\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

حل. باتوجه به دستور (۱)، به‌ترتیب داریم:

$$A^{-\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\tan\alpha\cos\alpha + \cot\alpha\sin\alpha}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\cot\alpha & \tan\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\text{۱}}{\sin\alpha + \cos\alpha}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\cot\alpha & \tan\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} & \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \\ -\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} & \dfrac{\tan\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \end{bmatrix}$$

که بعد از اندکی تبدیل، به‌دست می‌آید:

$$A^{-\text{۱}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\text{۱}}{\text{۱} + \tan\alpha} & \dfrac{\text{۱}}{\text{۱} + \cot\alpha} \\ \dfrac{\text{۱}}{\sin\alpha(\text{۱} + \tan\alpha)} & \dfrac{\text{۱}}{\cos\alpha(\text{۱} + \cot\alpha)} \end{bmatrix}$$

§۴. دترمینان

۱. واژهٔ دترمینان، از واژهٔ لاتینی «دترمینان‌تیس»، به‌معنای مُعرف و مشخص‌کننده گرفته شده است و، در زبان فارسی، می‌توان شناسه نامید.

هر ماتریس مربعی، یک دترمینان (یا یک شناسه) دارد که به آن «دترمینان ماتریس» گویند و به این صورت نشان می‌دهند (برای ماریس مربعی ۲×۲):

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad (*)$$

هر دترمینانی که درایه‌های آن، عدد باشند، مقداری عددی است. مثلاً، مقدار عددی دترمینان ۲×۲، یعنی $(*)$، برابر است با

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \qquad (**)$$

در واقع، دترمینان ۲×۲، دارای یک قطر اصلی (از گوشه چپ و بالا به سمت گوشهٔ راست و پایین) و یک قطر فرعی (از گوشهٔ راست بالا به سمت گوشهٔ چپ و پایین) است. مقدار دترمینان مرتبهٔ ۲ (یعنی دترمینان ۲×۲)، شامل جمع جبری دو جمله است: جملهٔ اول، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی با علامت مثبت، و حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی با علامت منفی. مثلاً

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۲ \times ۴ - ۵ \times ۱ = ۳; \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱;$$

$$\begin{vmatrix} \sin^۲\alpha & \cos^۲\alpha \\ \tan^۲\alpha & -\cot^۲\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^۲\alpha\cot^۲\alpha - \cos^۲\alpha\tan^۲\alpha = -\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = -۱$$

۲. ویژگی‌های دترمینان مرتبه ۲. دترمینان ۲×۲، ویژگی‌هایی دارد که برخی از آن‌ها را یادآور می‌شویم:

۱) اگر جای سطرها و ستون را با هم عوض کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

۲) اگر جای دو سطر یا دو ستون را با هم عوض کنیم، مقدار دترمینان به قرینهٔ خود تبدیل می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix}$$

۳) اگر درایه‌های دو سطر یا درایه‌های دو ستون متناسب باشند، مقدار دترمینان، برابر صفر می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = a \cdot kb - b \cdot ka = ۰$$

۴) اگر درایه‌های یک سطر یا درایه‌های یک ستون، هردو بر عددی بخش‌پذیر باشند (مقسوم‌علیه مشترکی داشته باشند)، می‌توان این مقسوم‌علیه مشترک را جلو دترمینان گذاشت:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a' & b' \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} ka & b \\ ka' & b' \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۵) اگر همه درایه‌های یک سطر یا همهٔ درایه‌های یک ستون، مجموع دو مقدار باشند، می‌توان دترمینان را برابر مجموع دو دترمینان نوشت:

$$\begin{vmatrix} a+k & b+k' \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & k' \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۶) اگر مضرب‌های یک سطر (یا مضرب‌های یک ستون) را به سطر (یا ستون) دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ma \\ a' & b'+ma' \end{vmatrix}$$

مسال ۱۵. *مطلوب است محاسبهٔ دترمینان*

$$A = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۱۷۱ + ۳a\sin\alpha \\ \frac{۱}{۳} & ۱۱۸ + ۲a\cos\alpha \end{vmatrix}$$

مقدار عددی این دترمینان را، برای $\alpha = \frac{۳\pi}{۴}$ *و* $a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ *محاسبه کنید.*

حل. مقدار دترمینان را می‌توان، به‌طور مستقیم و با استفاده از دستور (**) محاسبه کرد:

$$A = \frac{۱}{۲}(۱۱۸ + ۲a\cos\alpha) - \frac{۱}{۳}(۱۷۱ + ۳a\sin\alpha) =$$
$$= ۵۹ + a\cos\alpha - ۵۷ - a\sin\alpha = ۲ + a(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

و به‌ازای $a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\alpha = \frac{۳\pi}{۴}$، به‌دست می‌آید:

$$A = ۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\cos\frac{۳\pi}{۴} - \sin\frac{۳\pi}{۴}\right) =$$
$$= ۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۲ - ۱ = ۱$$

ولی در این‌جا، مقدار دترمینان را با تبدیل آن به دترمینان‌های ساده‌تر هم، محاسبه می‌کنیم. گرچه، برای دترمینان A، راه مستقیم ساده‌تر است و زودتر

به نتیجه می‌رسد، ولی با روشی که در این‌جا دنبال می‌کنیم، با ویژگی‌های دترمینان، بهتر آشنا می‌شوید.

اول. باتوجه به ویژگی ۵، داریم:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۱۷۱ \\ \frac{۱}{۳} & ۱۱۸ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۳a\sin\alpha \\ \frac{۱}{۳} & ۲a\cos\alpha \end{vmatrix}$$

این دو دترمینان را (از چپ به راست) B و C می‌نامیم. دترمینان B را می‌توان این‌طور نوشت:

$$B = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۳ + \frac{۱}{۲} \times ۳۳۶ \\ \frac{۱}{۳} & ۶ + \frac{۱}{۳} \times ۳۳۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۳ \\ \frac{۱}{۳} & ۶ \end{vmatrix}$$

(باتوجه به ویژگی ۶). بنابراین

$$B = \frac{۱}{۲} \times ۶ - \frac{۱}{۳} \times ۳ = ۳ - ۱ = ۲$$

برای دترمینان C داریم

$$C = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۳a\sin\alpha \\ \frac{۱}{۳} & ۲a\cos\alpha \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & ۳\sin\alpha \\ \frac{۱}{۳} & ۲\cos\alpha \end{vmatrix}$$

(باتوجه به ویژگی ۴). بنابراین $C = a(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

به این ترتیب $A = B + C = ۲ + a(\cos\alpha - \sin\alpha)$

***یادداشت.** ویژگی‌هایی که برای دترمینان ۲×۲ آوردیم، در حالت کلی و برای هر دترمینانی درست است. ولی در این کتاب، به دترمینان‌های بالاتر

از مرتبهٔ ۲ نمی‌پردازیم. تنها، برای تمرین و آشنایی بیشتر، روش محاسبهٔ دترمینان 3×3 را می‌آوریم.

این دترمینان مرتبه ۳ را در نظر می‌گیریم:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

مقدار این دترمینان، به این ترتیب، به‌دست می‌آید: سطر اول دترمینان را در نظر می‌گیریم. درایهٔ اول (یعنی a) را در دترمینانی ضرب می‌کنیم که با حذف سطر اول و ستون اول (یعنی سطر و ستونی که a متعلق به آن است) به‌دست می‌آید:

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' - ac'b''$$

بعد، قرینهٔ حاصل‌ضرب درایهٔ دوم سطر اول (b) را در دترمینانی که با حذف سطر اول و ستون دوم (سطر و ستونی که b متعلق به آن است) به‌دست می‌آید، پیدا می‌کنیم:

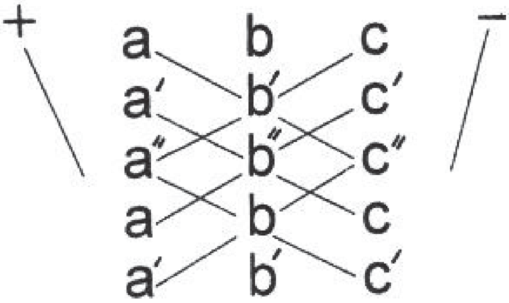
$$-b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} = -ba'c'' + bc'a''$$

و سرانجام درایهٔ سوم سطر اول را در دترمینانی ضرب می‌کنیم که با حذف سطر اول و ستون سوم به‌دست می‌آید:

$$c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = ca'b'' - cb'a''$$

مجموع این سه عبارت، مقداری دترمینان D است:

$$D = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a''$$



شکل ۳۰

پی‌یر ساروس، ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۹۸_۱۸۶۱)، روشی ساده برای محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ ۳ به‌دست داده است که به نام خود او، «روش ساروس» نامیده می‌شود. این روش محاسبه (که ویژهٔ دترمینان مرتبهٔ سوم است) چنین است: این دترمینان را در نظر می‌گیریم:

$$M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

همان‌طور که می‌دانید، این دترمینان دو قطر دارد: قطر اصلی که از گوشهٔ چپِ بالا به گوشهٔ راستِ پایین می‌رود؛ و قطر فرعی که از گوشهٔ راستِ بالا به گوشهٔ چپ پایین می‌رود.

دو سطر اول دترمینان M را، به‌عنوان سطرهای چهارم و پنجم به آن اضافه می‌کنیم.

مواظب باشد، شکل ۳۰، یک دترمینان نیست.این شکل، جدولی است که تنها برای محاسبهٔ مقدار دترمینان M، با روش ساروس، رسم شده است.

در این جدول، سه قطر از چپ به راست می‌رود (قطر اصلی و دو قطر موازی آن) و سه قطر از راست به چپ وجود دارد (قطر فرعی و دو قطر موازی آن). این قطرها در شکل ۳۰، با پاره‌خط‌های راست رسم شده‌اند.

درایه‌های هر قطر را در هم ضرب می‌کنیم، هریک از این حاصل‌ضرب‌ها، یک جمله از حاصل دترمینان را به ما می‌دهد. جمع جبری سه‌جمله‌ای که از ضرب درایه‌های قطر اصلی و قطرهای موازی آن به‌دست می‌آید، با قرینه‌های سه جملهٔ مربوط به ضرب درایه‌های قطر فرعی و دو قطر موازی با آن، مقدار بسط دترمینان است.

مثال ۱۶. *مقدار عددی حاصل از بسط این دترمینان را پیدا کنید:*

$$N = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & -۴ & ۵ \end{vmatrix}$$

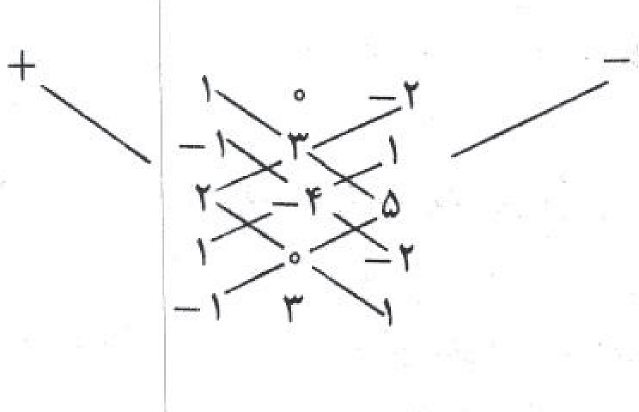
حل. اول، مقدار دترمینان N را، بنابر تعریف محاسبه می‌کنیم:

$$N = ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۴ & ۵ \end{vmatrix} - ۰ \times \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} + (-۲) \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۴ \end{vmatrix} =$$

$$= ۱(۳ \times ۵ + ۴ \times ۱) - ۲(-۱ \times -۴ - ۲ \times ۳) =$$

$$= ۱ \times ۱۹ - ۲ \times -۲ = ۱۹ + ۴ = ۲۳$$

اکنون، همین دترمینان N را، با روش ساروس، محاسبه می‌کنیم:



$$N = ۱ \times ۳ \times ۵ + (-۱ \times -۴ \times -۲) + ۲ \times ۰ \times ۱ -$$

$$-(-۲ \times ۳ \times ۲) - (۱ \times -۴ \times ۱) - (۵ \times ۰ \times -۱) =$$
$$= ۱۵ - ۸ + ۱۲ + ۴ = ۲۳$$

یادداشت ۲. بسط دترمینان‌های بالاتر از مرتبه سوم هم، شبیه بسط دترمینان مرتبهٔ سوم تعریف می‌شود. این تعریف را، بسط دترمینان نسبت به سطر اول می‌نامند. نخستین درایهٔ سطر اول در دترمینانی ضرب می‌شود که از حذف سطر اول و ستون اول به‌دست می‌آید: این، جملهٔ اول مقدار دترمینان را می‌دهد. به‌همین ترتیب، با انتخاب متوالی درایه‌های سطر اول و ضرب آن در دترمینانی که از حذف سطر و ستون مربوط به آن درایه به دست می‌آید، جمله‌های بعدی بسط دترمینان به‌دست می‌آید. تنها باید درایه‌های ردیف فرد را در سطر اول بدون تغییرعلامت و درایه‌های ردیف زوج سطر اول را با علامت مخالف در نظر گرفت.

مثال ۱۷. *مطلوب است محاسبهٔ دترمینان*

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

حل. بنابر قاعده عمل می‌کنیم:

$$\Delta = ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ & ۳ \end{vmatrix} - ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۲ \end{vmatrix} + ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} -$$

$$-۱ \times \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \end{vmatrix} = A - B + C - D;$$

$$A = \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} - ۲ \begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} + ۳ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} =$$

$$= (۱۵ - ۱۶) - ۲(۱۰ - ۱۲) + ۳(۸ - ۹) = ۰;$$

$$B = -۲ \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} + ۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۰;$$

به همین ترتیب: $C = ۰$ و $D = ۰$. درنتیجه $\Delta = ۰$.

با استفاده از ویژگی‌های دترمینان، می‌توانستیم، Δ را، سریع‌تر و ساده‌تر محاسبه کنیم. می‌دانیم، اگر مضربی از یک سطر را با سطر دیگر جمع کنیم، در مقدار دترمینان، تغییری پدید نمی‌آید. قرینه‌های عددهای سطر سوم را با درایه‌های سطر اول جمع می‌کنیم و به‌جای سطر اول قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & -۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$$

اکنون، مجموع درایه‌های دو سطر اول و دوم را به‌جای سطر اول می‌گذاریم:

$$A = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$$

و دیگر روشن است که $\Delta = ۰$.

۵§. دستگاه‌های دومجهولی خطی

دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad (۱)$$

با حل این دستگاه آشنا هستیم و می‌توانیم جواب آن را به‌دست آوریم:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \cdot y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

که باتوجه به نماد دترمینان، می‌توان جواب را این‌طور نوشت:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad (۲)$$

با شرط $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \neq ۰$ یا $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

به‌این ترتیب، با شرط $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، جواب دستگاه (۱)، به یاری دستور (۲) به‌دست می‌آید:

مثال ۱۸. *این دستگاه را حل کنید:*

$$\begin{cases} (m^۲ - ۱)x + m(m + ۱)y = ۲m + ۱ \\ (m - ۱)x + (m + ۱)y = ۲ \end{cases}$$

حل. در آغاز $\frac{a}{a'}$ و $\frac{b}{b'}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{m^۲ - ۱}{m - ۱} = m + ۱, \quad m \neq ۱ \text{ با شرط}$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{m(m + ۱)}{m + ۱} = m, \quad m \neq -۱ \text{ با شرط}$$

و باتوجه به دو شرط $m \neq ۱$ و $m \neq -۱$، به‌دست می‌آید: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، زیرا $m+۱$ نمی‌تواند برابر m باشد. با شرط $m \neq \pm ۱$، دترمینان مخرج‌های x و y را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = (m^{۲} - ۱)(m+۱) -$$
$$-m(m+۱)(m-۱) = (m-۱)(m+۱),$$

و برای دترمینان صورت کسری که مقدار x را می‌دهد:

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc' =$$
$$= (۲m+۱)(m+۱) - ۲m(m+۱) = m+۱$$

به همین ترتیب، برای صورت کسر y:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca' = m - ۱$$

بنابراین، با شرط $m \neq \pm ۱$ داریم:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m+۱}{(m-۱)(m+۱)} = \dfrac{۱}{m-۱}, \\ y = \dfrac{m-۱}{(m-۱)(m+۱)} = \dfrac{۱}{m+۱} \end{cases}$$

می‌ماند حالت‌های $m = ۱$ و $m = -۱$. در این دو حالت، دستگاه جواب ندارد، زیرا به‌ازای $m = ۱$، به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} ۲y = ۳ \\ ۲y = ۲ \end{cases}$$

که به روشنی ناسازگار است ($۲y$ نمی‌تواند هم برابر ۳ و هم برابر ۲ باشد) و به‌ازای $m = -۱$ به دستگاهی شامل دو معادلهٔ $۰ = -۱$ و $-۲x = ۲$ می‌رسیم که باز هم ناسازگار است (۰ نمی‌تواند برابر ۱− باشد).

پاسخ. دستگاه به‌ازای $m = ۱$ و $m = -۱$ جواب ندارد و به‌ازای $m \neq \pm ۱$، یک جواب منحصر دارد: $x = \frac{۱}{m - ۱}$ و $y = \frac{۱}{m + ۱}$.

مثال ۱۹. *این دستگاه را حل کنید:*

$$\begin{cases} x \sin \alpha + y \cos \alpha = ۱ \\ x \tan \alpha + y \cot \alpha = \frac{۱}{\sin \alpha} + \frac{۱}{\cos \alpha} - \sin \alpha - \cos \alpha \end{cases}$$

حل. دستگاه، به‌ازای $\alpha = k\frac{\pi}{۲}$ معنای خود را از دست می‌دهد، زیرا در این صورت، $\tan \alpha$ یا $\cot \alpha$، قابل تعریف نیست. به‌ازای $\alpha \neq k\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$ab' - ba' = \sin \alpha \cot \alpha - \cos \alpha \tan \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha$$

برای $ab' - ba' = ۰$ به‌دست می‌آید:

$$\cos \alpha - \sin \alpha = ۰ \Rightarrow ۱ - \tan \alpha = ۰ \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

که در آن، k عددی است درست. $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{۴}$ می‌گیریم:

$$cb' - bc' = \cot \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - ۱ + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^۲ \alpha =$$
$$= -۱ + \sin \alpha \cos \alpha + (۱ - \sin^۲ \alpha) = \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha),$$
$$ac' - ca' = \cos \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

از آن‌جا، به‌ازای $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{۴}$:

$$x = \frac{\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \sin\alpha;\ y = \cos\alpha$$

اگر داشته باشیم: $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{۴}$، دو حالت پیش می‌آید:

۱) k عددی زوج باشد $(k = ۲m)$. در این صورت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{۲} \\ x + y = \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow x + y = \sqrt{۲}$$

دو معادلهٔ دستگاه، معرف یک معادله‌اند. دستگاه بی‌نهایت جواب دارد:

$$y = \sqrt{۲} - x \qquad .(*)$$

یعنی x را می‌توان هر عدد حقیقی دلخواه و، سپس، y را از $(*)$ به‌دست آورد. در واقع، معادله‌های دستگاه، در این حالت دو خط راستِ منطبق بر هم را، روی دستگاه محورهای مختصات نشان می‌دهند.

۲) k عددی فرد باشد، در این صورت

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{۲} \\ x + y = \sqrt{۲} \end{cases}$$

که معادله‌های آن، ناسازگارند ($x + y$ نمی‌تواند، در عین حال، برابر $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ باشد). در این حالت، دو معادلهٔ دستگاه، معرف دو خط راست موازی در دستگاه محورهای مختصات هستند.

پاسخ. ۱) دستگاه به‌ازای $\alpha = k\frac{\pi}{۲}$ معنا ندارد؛

۲) دستگاه به‌ازای $\alpha = ۲m\pi + \frac{\pi}{۴}$، بی‌نهایت جواب دارد؛

۳) دستگاه به‌ازای $\alpha = (۲m + ۱)\pi + \frac{\pi}{۴}$ جواب ندارد؛

۴) دستگاه، برای $\alpha \neq k\frac{\pi}{۲}$ و $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{۴}$ $(k \in \mathbf{Z})$ یک جواب دارد:

$$x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha$$

***یادداشت.** شبیه این بحث‌ها را دربارهٔ سه معادلهٔ خطی سه‌مجهولی می‌توان انجام داد و برای دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

به‌دست آورد.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

همه‌جا، در مخرج‌ها، دترمینان ضریب‌های مجهول‌ها قرار دارد. صورت کسرها، همان دترمینان مخرج است، به‌شرطی‌که به‌جای ضریب‌های مجهول،

مقدارهای ثابت را قرار دهیم.

مثال ۲۰. *این دستگاه را حل کنید:*

$$\begin{cases} ۲x + y = ۱ \\ y + z = ۲ \\ x + y + z = ۴ \end{cases}$$

حل. دترمینان ضریب‌های مجهول‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

و برای دترمینان صورت مجهول x:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} = ۲$$

بنابراین $x = ۲$.

پاسخ. $x = ۲$، $y = -۳$، $z = ۵$.

*۶§. دستورهای هندسی به‌یاری دترمینان

۱. معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ مفروض می‌گذرد. دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ را در نظر می‌گیریم و معادلهٔ خط راستی را، که از این دو نقطه می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$y - y_۱ = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}(x - x_۱) \qquad (۱)$$

این معادله را، به‌ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$y(x_1 - x_2) - x(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2) + x_1(y_1 - y_2) = 0;$$
$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0;$$
$$x\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0;$$

سمت چپ این برابری، باز شدهٔ یک دترمینان مرتبهٔ ۳ است:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲)، معادلهٔ خط راستی است که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

مثال ۲۱. *معادلهٔ خط راستی را بنویسید که محور $x'x$ را در نقطهٔ به طول ۲− و محور $y'y$ را در نقطهٔ به عرض ۳ قطع کند.*

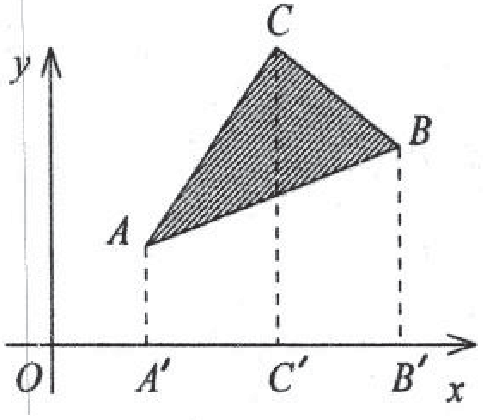
حل. در این‌جا $A(-2, 0)$ و $B(0, 3)$ است، یعنی

$$x_1 = -2, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 0, \; y_2 = 3$$

بنابراین، معادلهٔ خط راستی که از A و B می‌گذرد، باتوجه به دستور (۲)، چنین است:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یادداشت. می‌دانیم، از هر سه نقطهٔ فضا (به‌شرطی که روی یک خط راست نباشند) یک صفحه می‌گذرد. اگر مختصات سه نقطهٔ A، B و C را



شکل ۳۱

در دستگاه مختصات فضایی

$$A\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix}\right. \quad C\left|\begin{matrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{matrix}\right.$$

بگیریم، آن‌وقت ثابت می‌شود که معادلهٔ صفحهٔ (ABC)، دو دستگاه محورهای مختصات قائم $Oxyz$ چنین است:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۲. محاسبهٔ مساحت مثلث با معلوم بودن مختصات راس‌های آن. برای مثلث ABC فرض می‌کنیم:

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3)$$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC، می‌توان مساحت ذوزنقهٔ $AA'B'B$ را از مجموع مساحت‌های دو ذوزنقه $AA'C'C$ و $CC'B'B$ کم کرد (شکل

۳۱). مقدار مساحت مثلث ABC را S می‌نامیم. به‌دست می‌آید:

$$S_{AA'C'C} = \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۳)(x_۳ - x_۱);$$

$$S_{CC'B'B} = \frac{۱}{۲}(y_۲ + y_۳)(x_۲ - x_۳);$$

$$S_{AA'B'B} = \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)(x_۲ - x_۱) =$$

$$= -\frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)(x_۱ - x_۲);$$

درنتیجه، برای S، مساحت مثلث، به‌دست آید:

$$S = \frac{۱}{۲}\,|(y_۱ + y_۲)(x_۱ - x_۲) +$$
$$+(y_۲ + y_۳)(x_۲ - x_۳) + (y_۳ + y_۱)(x_۳ - x_۱)|$$

مساحت مثلث باید مقداری مثبت باشد، به‌همین مناسبت، از علامت قدرمطلق استفاده کرده‌ایم. مقدار S را، با اندکی تبدیل، می‌توان چنین نوشت:

$$S = \frac{۱}{۲}\,|x_۱(y_۲ - y_۳) + x_۲(y_۳ - y_۱) + x_۳(y_۱ - y_۲)| \quad (۳)$$

(آزمایش کنید). برابری (۳)، به زبان دترمینان، به‌این صورت درمی‌آید:

$$S = \frac{۱}{۲}\left| x_۱ \begin{vmatrix} y_۲ & y_۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} - \right.$$
$$\left. - x_۲ \begin{vmatrix} y_۱ & y_۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} + x_۳ \begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \right|$$

مقدار داخل قدرمطلق، باز شدهٔ یک دترمینان مرتبهٔ ۳ است:

$$S = \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

در واقع، قدرمطلق این دترمینان، مقدار مساحت مثلث را می‌دهد.

مثال ۲۳. *اگر $A(-۱,۳)$، $B(۳,۰)$ و $C(۸,۱۲)$، راس‌های مثلث ABC باشند، مساحت مثلث را به‌دست آورید.*

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۲S = \begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۸ \\ ۳ & ۰ & ۱۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱\begin{vmatrix} ۰ & ۱۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} - ۳\begin{vmatrix} ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} +$$

$$+۸\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱(۰ - ۱۲) - ۳(۳ - ۱۲) +$$

$$+۸(۳ - ۰) = ۱۲ + ۲۷ + ۲۴ = ۶۳$$

پاسخ. $S = ۳۱\frac{۱}{۲}$ (واحد مربع).

همین‌قدر یادآوری می‌کنیم که، بسیاری از دستورهای هندسهٔ تحلیلی را، می‌توان با زبانی ساده به‌وسیلهٔ دترمینان بیان کرد؛ ولی در این‌جا از آن‌ها می‌گذریم.

*۷§. پدید آورندگان مفهوم‌های ماتریس و دترمینان

امروز دترمینان، به‌عنوان یک ماتریس مربعی، که بنابر تعریف، مقداری دارد، تعریف می‌شود. به‌همین مناسبت، تعریف دترمینان بعد از تعریف ماتریس و به‌عنوان بخشی از آن، مطرح می‌شود. ولی از دیدگاه تاریخی، مفهوم دترمینان، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به‌وجود آمد.

نظریهٔ دترمینان، در نیمهٔ دوم سدهٔ هجدهم و نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم، با بررسی‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سویسی (۱۷۰۴_۱۷۵۲)، با طرحِ مساله‌های مربوط به حل و بحث دستگاه‌های خطی درجه اول پدید آمد.

هنوز، در کتاب‌های دبیرستانی، دستورهای

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

را دستورهای کرامر، برای حل دستگاه شامل دو معادلهٔ خطی دومجهولی می‌نامند. ولی در پیدایش و تکامل مفهوم دترمینان، ریاضی‌دانانی، مثل «آلکساندر وان‌دِرموند» (۱۷۳۵ ـ ۱۷۹۶)، «پیرسیمون دولاپلاس» (۱۷۴۹ ـ ۱۸۲۷)، «اوگوست لوئی کوشی» (۱۷۸۹ ـ ۱۸۵۷) ـ ریاضی‌دانان فرانسوی؛ «کارل فردریک گوس» (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵) و «کارل گوستاو ژاکوبی» (۱۸۰۴ ـ ۱۸۵۱) ـ ریاضی‌دانان آلمانی ـ نقش جدی داشته‌اند.

پایه‌گذاری منظم نظریهٔ دترمینان، متعلق به «گوس»، ولی نام‌گذاری‌های امروزی مربوط به آن، از «آرتور کِی‌لی» (۱۸۲۱ ـ ۱۸۹۵)، ریاضی‌دان انگلیسی است.

مفهوم ماتریس، برای نخستین بار، در کارهای «ویلیام هامیلتون» (۱۸۰۵ ـ ۱۸۶۵)، ریاضی‌دان ایرلندی و «کِی‌لی» در نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم مطرح شد و پایه‌های نظری آن را، «کارل وایرشتراس» (۱۸۱۵ ـ ۱۸۹۷)، «فردیناند، فرو به‌نیوس» (۱۸۴۹ـ۱۹۱۷) و دیگران، در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم و نیمهٔ اول سدهٔ بیستم، ریختند.

در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، دترمینان از مرتبهٔ بی‌نهایت (که می‌توانست از یک طرف یا هر دو طرف، بی‌پایان باشد)، مطرح شد و مورد بررسی قرار گرفت.

تمرین‌ها

۱۶۶. چهارضلعی $CABCD$، با این ماتریس معرفی شده است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۶ & ۶ \end{bmatrix}$$

آیا $ABCD$، چهارضلعی خاصی است؟

*۱۶۷. به جدول ۳ × ۳ در شکل ۳۲ توجه کنید.

۵	۶	۷
۶	۷	۸
۷	۸	۹

شکل ۳۲

این، یک مربع وفقی نیست. در این جدول، مجموع عددهای هر قطر و مجموع عددها در سطر دوم و در ستون دوم، برابر است با ۲۱، ولی مجموع عددها در سطر اول و در ستون اول، برابر است با ۱۸ و مجموع عددها در سطر سوم و در ستون سوم، برابر است با ۲۴. این جدول، ویژگی دیگری دارد. عدد یکی از خانه‌های جدول را، به دلخواه انتخاب کنید (مثلاً، عدد ۶ از خانهٔ وسط سطر اول) و سطر و ستون مربوط به این خانه را حذف کنید (سطر اول و ستون دوم). سپس، از بین خانه‌های باقی‌ماندهٔ جدول، عدد دلخواه دیگری را انتخاب کنید (مثلاً عدد ۷ در خانه اول سطر سوم) و سطر و ستون مربوط به آن را حذف کنید (سطر سوم و ستون اول)، تنها یک خانه باقی می‌ماند (خانه‌ای که در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد، یعنی عدد ۸). اگر این عددهای انتخابی را با هم جمع کنید، همیشه عدد ۲۱ به‌دست می‌آید:

$$۶ + ۷ + ۸ = ۲۱$$

راز این جدول را پیدا کنید. آیا می‌توانید جدول‌های دیگری با این ویژگی

بسازید؟ لازم نیست عدد ثابت، همیشه ۲۱ باشد. شما جدولی ۴ × ۴ بسازید که مجموع ثابت آن برابر ۵۵ باشد.

۱۶۸. با مثال نشان دهید، از مجموع یک ماتریس با ماتریس قرینهٔ آن، ماتریس صفر به‌دست می‌آید.

۱۶۹. x و y را از این معادله به‌دست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

۱۷۰. نقطهٔ به مختصات (x,y) داده شده است. ماتریسی ۲ × ۲ پیدا کنید که اگر آن را در ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ضرب کنیم: الف) مختصات $A_۱$ قرینهٔ A نسبت به محور $x'x$، ب) مختصات $A_۲$ قرینهٔ A نسبت به محور $y'y$، ج) مختصات نقطهٔ $A_۳$، قرینهٔ A نسبت به مبداء مختصات به‌دست آید.

۱۷۱. این ضرب‌ها را انجام دهید:

الف) $[-۳\quad ۴\quad ۱]\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۵ & ۶ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$ ؛ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ؛

د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$.

۱۷۲. $A(۱-m,۱+m)$ داده شده است. به‌کمک ماتریس‌ها، قرینهٔ این نقطه را نسبت به هریک از محورها و نسبت به مبداء مختصات پیدا کنید.

۱۷۳. a و b را به‌دست آورید، به‌شرطی که

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۱ \\ a & ۵ & ۸b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ ۷ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ \\ -۲۵ \end{bmatrix}$$

۱۷۴. بافرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$، مطلوب است:

الف) $A+B$؛ ب) $A-B$؛ ج) $A^{-۱}$؛ د) $B^{-۱}$؛ ه) $A^۲+B^۲$؛ و) AB؛ ز) BA.

۱۷۵. این دستگاه‌ها را حل و بحث کنید:

الف) $\begin{cases} (a-۳)x+ay=۲ \\ ۵x+۲y=-۲ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ax+by=۲ \\ bx+ay=\dfrac{a^۲+b^۲}{ab} \end{cases}$

۱۷۶. این دترمینان‌ها را محاسبه کنید:

۱) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\cos\alpha & \sin\alpha-\cos\alpha \\ \tan\alpha+\cot\alpha & \tan\alpha-\cot\alpha \end{vmatrix}$

*۲) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

*۳) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & ۱ \\ \sin\beta & \cos\beta & ۱ \\ \sin\gamma & \cos\gamma & ۱ \end{vmatrix}$

*۱۷۷) با چه شرطی، این برابری برقرار است:

$$\begin{vmatrix} ۱ & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & ۱ & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & ۰ & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & ۰ \end{vmatrix}$$

*۱۷۸. این ماتریس‌ها داده شده‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱۱ & ۱۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱۲ & ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

AB و AC را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

*۱۷۹. نقطه‌های $A(-۱, ۲)$، $B(۴, ۳)$ و $C(۳, ۵)$ مفروض‌اند:

الف) معادلهٔ هریک از ضلع‌های مثلث ABC را به‌کمک دترمینان بنویسید؛

ب) مساحت مثلث ABC را، به‌کمک دترمینان پیدا کنید.

*۱۸۰. حاصل این دترمینان را به‌دست آورید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & ۱ \\ b & c & a & ۱ \\ c & a & b & ۱ \\ \frac{b+c}{۲} & \frac{c+a}{۲} & \frac{a+b}{۲} & ۱ \end{vmatrix}$$

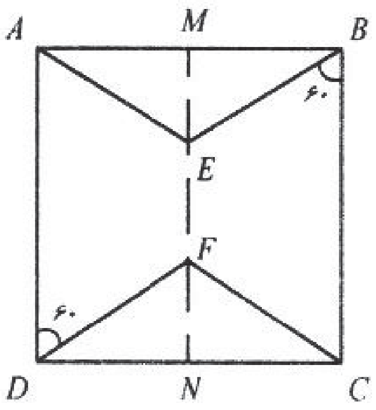
پاسخ، راهنمایی و حل تمرین‌ها

پیش از آغاز و یادآوری

۱. فرض می‌کنیم، در عدد نه‌رقمی $n^۲ + ۱$، همهٔ رقم‌های از ۱ تا ۹ وجود داشته باشد، در این‌صورت، مجموع رقم‌های این عدد، چنین می‌شود:

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۴۵$$

یعنی باید عدد $n^۲ + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد (چون مجموع رقم‌های آن، بر ۳ بخش‌پذیر است). ولی ببینیم، آیا عدد $n^۲ + ۱$ $(n \in \mathbf{N})$ می‌تواند بر ۳ بخش‌پذیر باشد. برای این‌که، در تقسیم $n^۲ + ۱$ بر ۳، به باقی‌مانده‌ای برابر صفر برسیم، باید در تقسیم $n^۲$ بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱− (یا ۲) به‌دست آید. ولی باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $n^۲$ بر ۳، یا صفر است (وقتی n بر ۳ بخش‌پذیر باشد) و یا ۱ (وقتی n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد). یعنی $n^۲ + ۱$ نمی‌تواند بر ۳ بخش‌پذیر باشد. به‌این ترتیب، فرض ما نادرست است و ۹ رقم عدد $n^۲ + ۱$ نمی‌توانند مختلف باشند، یعنی دست‌کم باید دو رقم برابر داشته باشد.



شکل ۳۳

یادداشت. این‌گونه استدلال را، در ریاضیات، برهان **خُلف** می‌گویند. در استدلال با برهان خلف، فرض را بر نادرست بودنِ حکم مساله یا قضیه می‌گیریم و روشن می‌کنیم که، چنین فرضی، ما را به تناقض می‌کشاند. در برهان خلف، باید مواظب حالت‌های مختلفِ ممکن باشیم. مثلاً اگر بخواهیم، با برهان خلف، برابری دو زاویه را ثابت کنیم، باید ثابت کنیم، زاویهٔ اول از زاویهٔ دوم بزرگتر نیست و، سپس، ثابت کنیم، زاویهٔ اول از زاویهٔ دوم کوچکتر هم نیست.

۲. فرض می‌کنیم، چهار مرکز، در راس‌های مربع $ABCD$ باشند (شکل ۳۳). مثلث‌های متساوی‌الساقین ABE و CDF را با زاویه‌های راس ۱۲۰ درجه در نظر می‌گیریم. اگر از نقطهٔ M وسط ضلع AB، به نقطهٔ N وسط ضلع CD وصل کنیم، پاره‌خط راست MN، از نقطه‌های E و F می‌گذرد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBE داریم:

$$|BM| = ۵, \quad |BE| = ۲|ME|$$

اگر فرض کنیم $|BE| = x$، بنابه رابطهٔ فیثاغورث به‌دست می‌آید:

$$x^{۲} - \frac{x^{۲}}{۴} = ۲۵ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳}\sqrt{۳}$$

برای مقدار $\sqrt{۳}$ داریم:

$$۱/۷۳۲ < \sqrt{۳} < ۱/۷۳۳$$

بنابراین $|BE| < ۵/۷۸$ و درنتیجه

$$|BE| + |AE| + |CF| + |DF| = ۴|BE| < ۲۳/۱۲$$

طول پاره‌خط راست ME برابر $\frac{x}{۲}$ است، پس

$$|ME| + |NF| = \frac{۱۰}{۳}\sqrt{۳} > ۵/۷۷۳$$

از آن‌جا

$$|EF| = |MN| - (|ME| + |NF|) < ۱۰ - ۵/۷۷۳ = ۴/۲۲۷$$

بنابراین، اگر جاده‌ها را به‌صورت AE، BE، EF، FC و FD بسازیم، مجموع طول‌های آن‌ها چنین می‌شود:

$$|AE| + |BE| + |CF| + |DF| +$$
$$+|FE| < ۲۳/۱۲ + ۴/۲۳ = ۲۷/۳۵$$

مجموع طول جاده‌ها، از ۲۷ کیلومتر و ۳۵۰ متر، و به‌طور طبیعی از ۲۸ کیلومتر کمتر می‌شود.

۳. این یک قانون است: مجذور هر عدد فرد، در تقسیم بر ۸، به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسد. در واقع، اگر x را عددی فرد فرض کنیم (یعنی فرض کنیم $x = ۲k + ۱$)، آن‌وقت

$$x^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴k(k + ۱) + ۱$$

$k(k + ۱)$ عددی زوج است (از دو عدد طبیعی پشت سرهم، یکی زوج است)، بنابراین $۴k(k + ۱)$ بر ۸ بخش‌پذیر است، یعنی $x^۲$ در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ می‌دهد.

۴. عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که بر ۲ و بر ۳ بخش‌پذیر باشد. وقتی مجموع سه عدد زوج باشد، به معنای آن است که یا هر سه عدد زوج‌اند و یا یکی از آن‌ها زوج و دوتای دیگر فرد است. چون مکعب عدد زوج، عددی زوج و مکعب عدد فرد، عددی فرد می‌شود، بنابراین، مجموع مکعب‌های این سه عدد، عددی زوج و بر ۲ بخش‌پذیر است.

باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $x^۳$ بر ۳ $(x \in \mathbf{N})$ با باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم x بر ۳، یکی است، زیرا عدد x، نسبت به عدد ۳، سه حالت دارد:

$$x = ۳k, \quad x = ۳k + ۱, \quad x = ۳k + ۲;$$

در حالتی که x بر ۳ بخش‌پذیر باشد، روشن است که $x^۳$هم بر ۳بخش‌پذیر است. در حالت $x = ۳k + ۱$، مقدار $x^۳$ به‌صورت

$$x^۳ = ۲۷k^۳ + ۲۷k^۲ + ۹k + ۱ = ۹(۳k^۳ + ۳k^۲ + k) + ۱$$

درمی‌آید، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۳، برابر ۱ است. همچنین، در حالت $x = ۳k + ۲$، برای $x^۳$ به‌دست می‌آید:

$x^3 = 3(9k^3 + 18k^2 + 12k + 2) + 2$ که بازهم در تقسیم بر ۳، به باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد. یعنی اگر مجموع سه عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد، مجموع مکعب‌های آن‌ها هم، بر ۳ بخش‌پذیر است.

یادداشت. این مساله را می‌توان، به‌صورت کلی‌تر زیر آورد:

اگر مجموع سه عدد بر ۶ بخش‌پذیر باشد، مجموع توان‌های فرد آن‌ها (ولو این‌که این توان‌ها، با هم برابر نباشند)، بر ۶ بخش‌پذیر است. به‌این ترتیب، برای عددهای طبیعی x، y، z، m، n و k، اگر $x + y + z$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $x^{2m+1} + y^{2n+1} + z^{2k+1}$ هم بر ۶ بخش‌پذیر است.

۵. اگر k، m و n را عددهای طبیعی فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$x = 3k + a = 4m + b = 5n + c$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$a = x - 3k, \quad b = x - 4m, \quad c = x - 5n$$

و بنابراین، برای $40a + 45b + 36c$، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&40a + 45b + 36c = \\
&= 40(x - 3k) + 45(x - 4m) + 36(x - 5n) = \\
&= 121x - 120k - 180m - 180n = \\
&= 60(2x - 2k - 3m - 3n) + x
\end{aligned}$$

این برابری نشان می‌دهد که از تقسیم $40a+45b+36c$ بر ۶۰، باقی‌مانده‌ای برابر x به‌دست می‌آید.

از این مساله می‌توانید، به عنوان سرگرمی استفاده کنید: از دوستی بخواهید عددی بین ۰ و ۶۰ فکر کند و باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم آن بر ۳، ۴ و ۵ را به شما بگوید، آن‌وقت، شما خود عدد را پیدا خواهید کرد.

۶. اگر n را عددی طبیعی و x را کسری کوچکتر از واحد فرض کنیم، می‌خواهیم داشته باشیم:

$$\sqrt{n+x}=n\sqrt{x}$$

از این معادلهٔ سادهٔ گنگ به‌دست می‌آید: $x=\frac{n}{n^۲-۱}$. و این، همان دستوری است که مساله می‌خواهد. مثلاً به‌ازای $n=۵$، به‌دست می‌آید $x=\frac{۵}{۲۴}$ و

$$\sqrt{۵\frac{۵}{۲۴}}=۵\sqrt{\frac{۵}{۲۴}}$$

۷. در واقع، اتحاد زیر، برای هر مقدار حقیقی x و y درست است:

$$\frac{x+\frac{۱}{y}}{y+\frac{۱}{x}}=\frac{x}{y}$$

و این همان دستوری است که لازم داشتیم (برای ما، x و y عددهایی طبیعی‌اند).

۸. سمت چپ برابری را تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{\sec^۲\alpha-۲\tan\alpha}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}-۲\tan\alpha}=$$

$$=\sqrt{۱+\tan^۲\alpha-۲\tan\alpha}=\sqrt{(۱-\tan\alpha)^۲}=|۱-\tan\alpha|$$

برابری مساله اتحاد نیست، زیرا $|\tan\alpha - ۱|$ همیشه با $\tan\alpha - ۱$ برابر نیست.

برای این‌که برابری $|\tan\alpha - ۱| = ۱ - \tan\alpha$ برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$۱ - \tan\alpha \geq ۰ \Rightarrow \tan\alpha \leq ۱$$

روشن است، اگر $\tan\alpha \leq ۰$، آن‌وقت نابرابری برقرار است (وقتی که انتهای کمان α در ربع دوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد). برای $۰ \leq \tan\alpha < ۱$، دو حالت ممکن است: ۱) انتهای کمان α در نیمه اول ربع اول، یا در نیمهٔ اول ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. اگر تنها کمان‌های بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ را در نظر بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که، برای برقراری اتحاد، باید داشته باشیم:

$$-\frac{\pi}{۲} < x \leq \frac{\pi}{۴} \text{ یا } \frac{\pi}{۲} < x < \frac{۵\pi}{۴}$$

به این ترتیب، برابری مساله، وقتی یک اتحاد است که داشته باشیم:

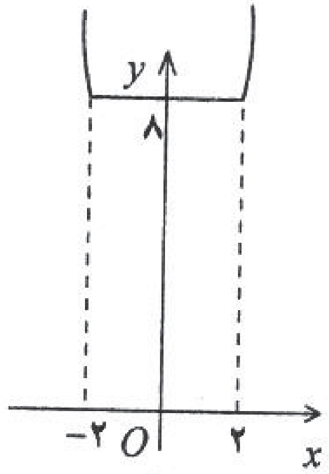
$$۲k\pi - \frac{\pi}{۲} < \alpha \leq ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \text{ یا } ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} < \alpha < ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴}$$

این دو جواب را می‌توان، به‌صورت کلی یک جواب نوشت:

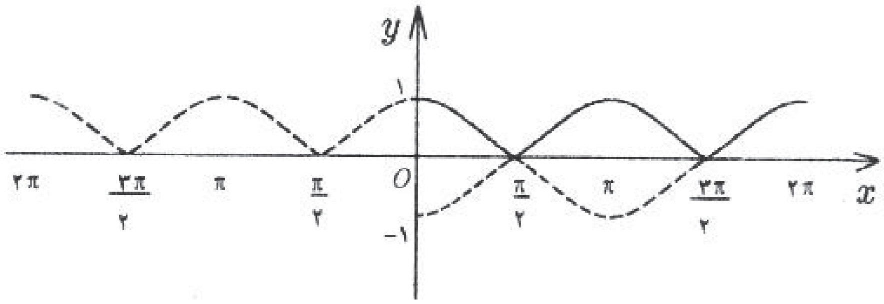
$$k\pi - \frac{\pi}{۲} < x \leq k\pi + \frac{\pi}{۴}, \ (k \in \mathbf{Z})$$

۹. ۱) تابع با ضابطهٔ y، به‌این صورت درمی‌آید:

$$y = |x^۲ - ۴| + x^۲ + ۴$$



شکل ۳۴



شکل ۳۵

اگر $x \le -۲$ یا $x \ge ۲$، آن‌وقت $x^۲ - ۴ \ge ۰$؛ اگر $-۲ \le x \le ۲$، آن‌وقت $x^۲ - ۴ \le ۰$ (محاسبه کنید و دلیل را پیدا کنید!). بنابراین

$$y = \begin{cases} ۸, & (-۲ \le x \le ۲) \\ ۲x^۲, & (x \le -۲ \text{ یا } x \ge ۲) \end{cases}$$

نمودار تابع را در شکل ۳۴ داده‌ایم.

۲) $y = |\cos x|$. باید نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \cos x$ را (مثلاً در فاصلهٔ ۰ تا ۲π) رسم و، سپس، بخشی از منحنی را که زیر محور $x'x$ است، به‌قرینهٔ خود نسبت به‌این محور تبدیل کرد (شکل ۳۵).

۱۰. روشن است که چیستا، از خواهران خود بزرگتر است، زیرا مساله می‌گوید «وقتی ناهید به سن امروزی چیستا برسد»، یعنی ناهید از چیستا

کوچکتر است؛ همچنین مساله می‌گوید «آن‌وقت، سن چیستا، دو برابر سن مژده خواهد بود»، یعنی مژده هم از چیستا کوچکتر است.

فرض می‌کنیم، سن امروز چیستا برابر a، سن امروز ناهید برابر b و سن امروز مژده برابر c باشد. وقتی ناهید به سن امروز چیستا برسد، به‌اندازهٔ $(a-b)$ سال بزرگ شده است. در آن سال، سن سه خواهد چنین است:

چیستا : $a+(a-b)=2a-b;$

ناهید : $b+(a-b)=a$

مژده : $c+(a-b)=a+c-b$

مساله می‌گوید، سن چیستا دو برابر سن مژده می‌شود، یعنی

$$2a-b=2(a+c-b)\Rightarrow b=2c$$

یعنی، امروز، سن ناهید دو برابر سن مژده است.

پاسخ. چیستا از همه بزرگتر و مژده از همه کوچکتر است. سن امروز ناهید، دو برابر سن امروز مژده است.

۱۱. چون رئیس مدرسه، در بین سه نفر دیگر خویشاوندی ندارد؛ درضمن داراب برادرزادهٔ منوچهر است، پس رئیس مدرسه، نه داراب است و نه منوچهر.

یکی از دو برادری که در این گروه چهارنفری وجود دارد، یا منوچهر است و یا داراب، زیرا اگر این دو نفر، برادری در گروه نداشته باشند، باید ابراهیم و تهمورث بردار باشند. درنتیجه، بین این چهار نفر، دو نفر (ابراهیم و تهمورث) برادر و دو نفر دیگر (منوچهر و داراب)، عمود و برادرزاده‌اند و برای رئیس که خویشاوندی در گروه ندارد، جایی باقی نمی‌ماند.

به این ترتیب، معاون، دفتردار و خدمتگذار مدرسه، با هم خویشاوندند. ببینیم چه رابطه‌ای با هم دارند؟ دو حالت ممکن است:

حالت اول. معاون، همان منوچهر و، درضمن، عموی دفتردار و خدمت‌گذار است. ولی این حالت ممکن نیست، زیرا در صورت مساله گفته شده است: «معاون، عمودی دفتردار نیست».

حالت دوم. معاون داراب و، درضمن، برادرزادهٔ یکی از برادران و پسر برادر دیگر است. چون، خدمتگذار عموی معاون نیست، باید بپذیریم که، دفتردار عموی معاون است. بنابراین، دفتردار همان منوچهر و معاون همان داراب است. داراب از ابراهیم بزرگتر است، بنابراین خدمتگذار نمی‌تواند ابراهیم باشد (پدر نمی‌تواند از پسر بزرگتر باشد). پس خدمتگذار تهمورث است و رئیس (که از راه حذف به‌دست می‌آید) ابراهیم است.

پاسخ. ابراهیم، رئیس؛ داراب، معاون؛ منوچهر، دفتردار و تهمورث، خدمتگذار است. درضمن؛ موچهر و تهمورث برادرند و داراب پسر تهمورث است.

۱۲. از بین ۱۰۰ جهان‌گرد، ۹۰ نفر یا با زبان فرانسوی یا با زبان انگلیسی و یا با هر دو زبان آشنا هستند. چون ۷۵ نفر به زبان فرانسوی صحبت می‌کند، پس بقیه آن‌ها، یعنی

$$۹۰ - ۷۵ = ۱۵$$

۱۵ نفر تنها به زبان انگلیسی و، به همین ترتیب به تعداد

$$۹۰ - ۸۵ = ۵$$

۵ نفر تنها به زبان فرانسوی صحبت می‌کنند. ۵ + ۱۵، یعنی ۲۰ نفر یا زبان فرانسوی را می‌دانند و یا زبان انگلیسی را. بنابراین، تعداد جهان‌گردانی که با

هر دو زبان آشنایی دارند، برابر است با

$$۹۰ - ۲۰ = ۷۰ \text{ (نفر)}$$

۱۳. سطرهای ضرب را شماره‌گذاری می‌کنیم:

۱	۲ * * ×
۲	۳ * *
۳	۵ * *
۴	* ۴ *
۵	* * ۳
۶	* * * * *

اکنون، باتوجه به رقم‌های معلوم، به استدلال می‌پردازیم:

۱) رقم یکان سطر ۵، برابر است با ۳. این ۳، از ضرب ۳ (صدگان سطر ۲) در یکان سطر ۱ به‌دست آمده است. پس رقم یکان سطر ۱، برابر است با ۱.

۲) رقم صدگان سطر ۳، برابر است با ۵. این ۵، از ضرب رقم یکان سطر ۲ در صدگان سطر ۱ (یعنی ۲)، البته با اضافه شدن احتمالی دهگان ضرب قبلی، به‌دست آمده است. رقم یکان سطر ۲، به‌ناچار برابر است با ۲.

این دو رقم را که پیدا کرده‌ایم، با رقم‌هایی که به‌کمک وجود آن‌ها به‌دست می‌آیند، در ضرب می‌نویسیم (اول صفحه بعد را ببینید)

۱	۲ * ۱ ×
۲	۳ * ۲
۳	۵ * ۲
۴	* ۴ *
۵	* * ۳
۶	* * * * ۲

۳) دهگان سطر ۱ باید از ۴ بزرگتر باشد، زیرا از ضرب ۲ (یکان سطر ۲) در سطر اول، باید عددی بزرگتر از ۵۰۰ به‌دست آید.

۴) دهگان سطر ۲ باید از ۵ کوچکتر باشد، زیرا اگر چنین نباشد، عدد سطر ۴، چهاررقمی می‌شود.

۵) از ضرب دهگان سطر ۲ در دهگان سطر ۱، عددی با رقم سمت راست ۴ به‌دست آمده است.

ببینیم، حاصل‌ضرب کدام دو رقم به ۴ ختم می‌شود؛ در این‌جا، عدد سمت چپ را دهگان سطر ۱ و عدد سمت راست را دهگان سطر ۲ گرفته‌ایم؛ درضمن توجه داریم، رقم سمت چپ از ۴ بزرگتر و رقم سمت راست از ۵ کوچکتر است.

$$۶ \times ۴,\quad ۷ \times ۲,\quad ۸ \times ۳$$

از این سه عدد، ۲ × ۷ جواب نیست، زیرا ۷ در رقم‌های این ضرب وجود ندارد. اگر رقم دهگان سطر ۱ را ۶ و دهگان سطر ۲ را ۴ بگیریم، آن‌وقت، سطر ۴، عددی چهاررقمی می‌شود. تنها می‌ماند ۳ × ۸. دهگان

سطر ۱ را بر ۸ و دهگان سطر ۲ برابر ۳ و خود ضرب چنین است.

$$\begin{array}{r} ۲۸۱\ \times \\ ۳۳۲ \\ \hline ۵۶۲ \\ ۸۴۳ \\ ۸۴۳ \\ \hline ۹۳۲۹۲ \end{array}$$

۱۴. سه عدد را x، y و z می‌گیریم. بنابه فرض داریم:

$$\begin{cases} x + y + z = p^p \\ x + y = ۴z \end{cases} \Rightarrow ۵z = p^p$$

p عددی است اول. چون $۵z$ بر ۵ بخش‌پذیر است، پس باید p هم بر ۵ بخش‌پذیر باشد. چون p عددی است اول، پس

$$۵z = ۵^۵ \Rightarrow z = ۵^۴ = ۶۲۵$$

از آن‌جا $x + y = ۵^۵ - ۵^۴ = ۵^۴(۵ - ۱) = ۴ \times ۵^۴$

کوچکترین مضرب مشترک x و y، برابر ۲۵۰ است. تنها جواب ممکن عبارت است از

$x = ۲ \times ۵ = ۱۰, \quad y = ۲ \times ۵^۳ = ۲۵۰$ یا $x = ۲۵۰, \quad y = ۱۰$

پاسخ. ۱۰، ۲۵۰، ۶۲۵.

۱۵. یکی از جواب‌های ممکن، در این‌جا داده شده است:

$$۹۸ - ۷۶ + ۵۴ + ۳ + ۲۱ = ۱۰۰$$

۱۶. جملهٔ اول تصاعد حسابی را a و قدرنسبت آن را d می‌نامیم. دستگاه به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} ax + (a+d)y = a + ۲d \\ (a+۳d)x + (a+۴d)y = a + ۵d \end{cases}$$

دو طرف معادلهٔ اول را در $-(a+۴d)$ و دو طرف معادلهٔ دوم را در $a+d$ ضرب و، سپس، دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. بعد از ساده کردن به معادلهٔ $۳d^۲x = -۳d^۲$ می‌رسیم، یعنی $x = -۱$. با قرار دادن $x = -۱$ در یکی از دو معادله، برای y، جواب $y = ۲$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $x = -۱$ و $y = ۲$. جواب دستگاه، به قدرنسبت تصاعد و به مقدار جملهٔ اول تصاعد بستگی ندارد.

یادداشت ۱. اگر در دستگاه شامل دو معادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a، b و c تشکیل یک تصاعد حسابی و a'، b' و c' تشکیل تصاعد حسابی دیگری بدهند، باز هم دستگاه به همان جواب $x = -۱$ و $y = ۲$ می‌رسد. این دستگاه را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ax + (a+d)y = a + ۲d \\ a'x + (a'+d')y = a' + ۲d' \end{cases}$$

که در آن $a \neq a'$ و $d \neq d'$. اگر دو طرف معادلهٔ اول را در a' و دو طرف معادلهٔ دوم را در $-a$ ضرب و، سپس، دو معادله را با هم جمع کنیم، بعد از ساده کردن به‌دست می‌آید:

$$(a'd - ad')y = ۲(a'd - ad') \Rightarrow y = ۲$$

و با قرار دادن $y = ۲$، در یکی از دو معادله، $x = -۱$ به‌دست می‌آید.

یادداشت ۲. این ویژگی، که دربارهٔ دستگاه خطی شامل دو معادلهٔ دومجهولی دیدیم، برای دستگاه‌های خطی با تعداد مجهول‌های بیشتر، وجود ندارد. به‌عنوان نمونه، دستگاه شامل سه معادلهٔ خطی را در نظر می‌گیریم که ضریب‌ها (همراه با مقدارهای ثابت) تشکیل ۱۲ جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی بدهند. جملهٔ اول تصاعد را a و قدرنسبت آن را d گرفته‌ایم:

$$\begin{cases} ax + (a + d)y + (a + ۲d)z = a + ۳d \\ (a + ۴d)x + (a + ۵d)y + (a + ۶d)z = a + ۷d \\ (a + ۸d)x + (a + ۹d)y + (a + ۱۰d)z = a + ۱۱d \end{cases}$$

اگر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم و یا معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم کم کنیم، در هر حال، به معادلهٔ

$$x + y + z = ۱$$

می‌رسیم و اگر بین این معادله و معادلهٔ اول دستگاه، مجهول x را حذف کنیم، معادلهٔ

$$y + ۲z = ۳$$

به‌دست می‌آید. درنتیجه، دستگاه سه معادلهٔ خطی سه‌مجهولی، منجر به دستگاهی شامل دو معادله خطی سه‌مجهولی می‌شود:

$$\begin{cases} x + y + z = ۱ \\ y + ۲y = ۳ \end{cases} \qquad (*)$$

که جواب ثابتی ندارد (دستگاه، دارای بی‌نهایت جواب است). البته، در این‌جا هم، جواب‌ها، بستگی به a (جملهٔ اول تصاعد) یا d (قدر نسبت تصاعد ندارند و به‌ازای هر مقدار a و d، همیشه به دستگاه $(*)$ می‌رسیم.

۱۷. اگر کوچکترین عدد را n فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$n^۲ + (n + ۱)^۲ + (n + ۲)^۲ + (n + ۳)^۲ =$$
$$= (n + ۴)^۲ + (n + ۵)^۲ + (n + ۶)^۲$$

که بعد از باز کردن پرانتزها، به معادلهٔ درجه دوم

$$n^۲ - ۱۸n - ۶۳ = ۰$$

منجر می‌شود و از آن‌جا $n = ۲۱$. جواب $n = -۳$ عددی طبیعی نیست. درواقع

$$۲۱^۲ + ۲۲^۲ + ۲۳^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲ + ۲۶^۲ + ۲۷^۲$$

یادداشت. اگر همین مساله را، برای پنج عدد طبیعی پشت سرهم حل کنیم، به این جواب می‌رسیم:

$$۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ + ۱۴^۲$$

سرگِی راچنسکی (۱۸۶۸ـ۱۹۴۵ میلادی)، که دارای درجهٔ دکترا در دانش‌های طبیعی و استاد گیاه‌شناسی در دانشگاه مسکو بود، به دلیل فرهنگ بالای خود، دانشگاه را ترک کرد، به روستایی در نزدیکی اِسمولنسک رفت، مدرسه‌ای برای کودکان روستا درست کرد و خود در آن به تدریس و تعلیم کودکان پرداخت. از نمونه مساله‌هایی که برای این کودکان کم سال طرح کرده و آن‌ها را به اندیشه واداشته بود، مسالهٔ ساده کردن کسر

$$\frac{۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ + ۱۳^۲ + ۱۴^۲}{۳۶۵}$$

بود. درواقع، از آن‌جا که

$$۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ + ۱۴^۲ = ۳۶۵$$

بنابراین، حاصل این کسر، برابر ۲ می‌شود.

۱۸. عدد سه‌رقمی را $\overline{abc}$ می‌گیریم:

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

با رقم‌های a، b و c (بدون تکرار یکی از رقم‌ها)، می‌توان شش عدد دورقمی ساخت:

$$\overline{ab},\ \overline{ba},\ \overline{ac},\ \overline{ca},\ \overline{bc},\ \overline{cb}$$

مجموع این شش عدد دورقمی، برحسب a و b و c، چنین می‌شود:

$$(۱۰a + b) + (۱۰b + a) + (۱۰a + c) + (۱۰c + a) +$$
$$+(۱۰b + c) + (۱۰c + b) = ۲۲(a + b + c)$$

که باید با دوبرابر عدد $\overline{abc}$ برابر باشد، پس

$$۱۱(a + b + c) = ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

که به معادلهٔ زیر منجر می‌شود:

$$۸۹a = b + ۱۰c \qquad (۱)$$

یک معادله و سه مجهول. ولی این مجهول‌ها، نمی‌توانند هر عددی باشند. آن‌ها رقم‌های یک عددند و، بنابراین $۰ < a < ۱۰, ۰ \leq b, c < ۱۰$.

به سمت راست معادلهٔ (۱) توجه کنیم. b و c نمی‌توانند از ۹ بزرگتر باشند، بنابراین

$$۸۹a \leq ۹۹ \qquad (۲)$$

a نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد، زیرا در آن صورت نابرابری (۲) به هم می‌خورد. a نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا به‌ازای $a = ۰$، عدد $\overline{abc}$ دورقمی می‌شود. پس $a = ۱$. برابری (۱) چنین می‌شود:

$$b + ۱۰c = ۸۹ \qquad (۳)$$

روشن است که $c > ۷$، زیرا به‌ازای $c = ۷$، برای b عدد دورقمی ۱۹ به‌دست می‌آید. همین‌طور $c \neq ۹$، زیرا به‌ازای $c = ۹$، برای b عدد منفی ۱− پیدا می‌شود، پس $c = ۸$ و از آن‌جا $b = ۹$.

پاسخ. ۱۹۸.

۱۹. تعداد مرغ‌ها را x، تعداد خروس‌ها را y و تعداد غازها را z می‌گیریم. بنابراین

$$x + y + z = ۳۰ \qquad (۱)$$

برای مرغ‌ها به تعداد $\frac{x}{۳}$ اسکناس (هر سه مرغ، یک اسکناس)، برای خروس‌ها $\frac{y}{۲}$ اسکناس و برای غازها $۲z$ اسکناس پرداخته‌ایم، پس

$$\frac{x}{۳} + \frac{y}{۲} + ۲z = ۳۰ \Rightarrow ۲x + ۳y + ۱۲z = ۱۸۰ \qquad (۲)$$

اگر معادلهٔ (۲) را از ۱۲ برابر معادلهٔ (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۱۰x + ۹y = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۸ - \frac{۹y}{۱۰}$$

x، یعنی تعداد مرغ‌ها، عددی درست است، پس باید $\frac{۹y}{۱۰}$ عددی درست و کوچکتر از ۱۸ باشد. تنها امکان $y = ۱۰$ است که درنتیجه به‌دست می‌آید $x = ۹$؛ و باتوجه به معادلهٔ (۱)، $z = ۱۱$.

پاسخ. ۹ مرغ، ۱۰ خروس و ۱۱ غاز.

۲۰. اگر عدد طبیعی n را به عدد طبیعی x اضافه کنیم و مجموع بر n بخش‌پذیر باشد، به معنای آن است که خود x بر n بخش‌پذیر است. عدد سه‌رقمی مجهول را x می‌گیریم. این عدد باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد:

$$x = ۷k \qquad (۱)$$

یک‌بار ۷ واحد و بار دیگر ۸ واحد به x اضافه کرده‌ایم، مجموع بر ۸ بخش‌پذیر شده است، یعنی $x + ۷$ بر ۸ بخش‌پذیر است. چون

$$x + ۷ = (x - ۱) + ۸$$

پس باید $x - ۱$ بر ۸ بخش‌پذیر باشد:

$$x - ۱ = ۸m \Rightarrow x = ۸m + ۱ \qquad (۲)$$

به $x + ۷ + ۸ (= x + ۱۵)$ ۹ واحد اضافه کرده‌ایم، مجموع بر ۹ بخش‌پذیر شده است، یعنی باید $x + ۱۵$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد و چون

$$x + ۱۵ = (x - ۳) + ۱۸$$

بنابراین $x - ۳$ بر ۹ بخش‌پذیر است:

$$x - ۳ = ۹p \Rightarrow x = ۹p + ۳ \qquad (۳)$$

(در برابری‌های (۱) و (۲) و (۳)، k و m و p، عددهایی طبیعی‌اند.)

از مقایسهٔ برابری‌های (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$۸m + ۱ = ۹p + ۳ \Rightarrow m = p + \frac{p + ۲}{۸}$$

برای این‌که m عدد درستی باشد، باید $p + ۲$ بر ۸ بخش‌پذیر باشد، یعنی

$$p = ۸q - ۲, \quad (q \in \mathbf{N})$$

از آن‌جا، باتوجه به برابری (۳)

$$x = ۹(۸q - ۲) + ۳ = ۷۲q - ۱۵ \qquad (۴)$$

برابری (۴) را با برابری (۱) مقایسه می‌کنیم:

$$۷k = ۷۲q - ۱۵ \Rightarrow k = ۱۰q - ۲ + \frac{۲q - ۱}{۷}$$

برای این k عدد درستی باشد، باید $۲q - ۱$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد:

$$۲q - ۱ = ۷u \Rightarrow q = \frac{۷u + ۱}{۲} = ۳u + \frac{u + ۱}{۲} \qquad (۵)$$

و برای بخش‌پذیر بودن $u + ۱$ بر ۲، باید u عددی فرد باشد:

$$u = ۲t + ۱, \ (t \in \mathbf{N})$$

باتوجه به برابری (۵) نتیجه می‌شود:

$$q = ۳(۲t + ۱) + \frac{۲t + ۲}{۲} = ۷t + ۴$$

و سرانجام، باتوجه به برابری (۴):

$$x = ۷۲(۷t + ۴) - ۱۵ = ۵۰۴t + ۲۷۳$$

x، عددی است سه‌رقمی، بنابراین $t = ۰$ یا $t = ۱$:

$$t = ۰ \Rightarrow x = ۲۷۳$$

$$t = ۱ \Rightarrow x = ۷۷۷$$

۷۷۷ قابل‌قبول نیست، زیرا عدد سه‌رقمی، نباید رقم‌های تکراری داشته باشد.

پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد: ۲۷۳.

۲۱. m را عددی درست می‌گیریم و فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\log_۲(x^۲ - ۴x - ۱) = m, \quad (m \in \mathbf{Z})$$

از این‌جا، باتوجه به تعریف لگاریتم، به‌دست می‌آید:

$$x^۲ - ۴x - ۱ = ۲^m \Rightarrow x^۲ - ۴x - (۲^m + ۱) = ۰ \qquad (۱)$$

این معادلهٔ درجه دوم، وقتی ریشهٔ گویا دارد که، مبین آن، مجذور کامل باشد:

$$\Delta = ۴ + ۲^m + ۱ = ۵ + ۲^m$$

m برابر صفر نیست، زیرا $۲^۰ + ۵$، یعنی ۶ مجذور کامل نیست. دو حالت پیش می‌آید:

۱) اگر $m > ۰$. عدد $۲^m + ۵$ فرد است (چرا؟) بنابراین، برای عدد درستی مثل k، باید داشته باشیم:

$$۵ + ۲^m = (۲k + ۱)^۲ \Rightarrow ۲^m = ۴(k^۲ + k - ۱)$$

که اگر دو طرف برابری را بر ۴ بخش کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲^{m-۲} = k(k+۱) - ۱ \qquad (۲)$$

$k(k+۱)$ عددی زوج است (از دو عدد پشت سر هم، یکی زوج است)، بنابراین، مقدار سمت راست در برابری (۲)، عددی فرد می‌شود. از بین توان‌های ۲، تنها $۲^{۰}$ (یعنی ۱) عددی فرد است. پس

$$m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

معادلهٔ (۱)، به‌ازای $m = ۲$، چنین می‌شود:

$$x^{۲} - ۴x - ۵ = ۰ \Rightarrow x_{۱} = ۵,\ x_{۲} = -۱$$

۲) اگر $m < ۰$. فرض می‌کنیم $m = -n$ $(n > ۰)$ و مبین معادلهٔ (۱)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\Delta = ۵ + ۲^{m} = ۵ + \frac{۱}{۲^{n}} = \frac{۵ \times ۲^{n} + ۱}{۲^{n}}$$

مخرج (یعنی ۲^{n}) وقتی مجذور کامل است که n عددی زوج باشد: $n = ۲p$ $(p \in \mathbf{Z})$؛ درضمن داشته باشیم:

$$۵ \times ۴^{p} + ۱ = (۲k+۱)^{۲} \Rightarrow ۵ \times ۴^{p-۱} = k(k+۱) \qquad (۳)$$

k و $k + ۱$ و، همچنین ۵ و $۴^{p-۱}$ نسبت به هم اول‌اند، بنابراین وقتی این برابری برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} k + ۱ = ۵ \\ k = ۴^{p-۱} \end{cases} \Rightarrow k = ۴,\ p = ۲$$

از این‌جا $n = ۲p = ۴$ و $m = -n = -۴$، درنتیجه معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$۱۶x^۲ - ۶۴x - ۱۷ = ۰ \Rightarrow x_۳ = \frac{۱۷}{۴},\ x_۴ = -\frac{۱}{۴}$$

توجه کنید: در معادلهٔ (۳)، اگر فرض می‌کردیم $k+۱ = ۴^{p-۱}$ و $k = ۵$، به جواب درستی برای k و p نمی‌رسیدیم.

پاسخ. $x_۱ = ۵$، $x_۲ = -۱$، $x_۳ = \frac{۱۷}{۴}$، $x_۴ = -\frac{۱}{۴}$.

۲۲. اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y بنامیم، باید داشته باشیم:

$$xy = ۲(x+y) \Rightarrow y = \frac{۲x}{x-۲} =$$
$$= \frac{(۲x-۴)+۴}{x-۲} = ۲ + \frac{۴}{x-۲}$$

برای این‌که y عددی درست باشد، باید ۴ بر $x - ۲$ بخش‌پذیر باشد. ۴ تنها بر عددهای ۱، ۲ و ۴ بخش‌پذیر است (عددهای منفی را، به این دلیل کنار گذاشتیم که، طول هر ضلع مستطیل، عدی مثبت است):

$$x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳,\ y = ۶$$
$$x - ۲ = ۲ \Rightarrow x = ۴,\ y = ۴$$
$$x - ۲ = ۴ \Rightarrow x = ۶,\ y = ۳$$

پاسخ. در مستطیل ۳×۶ و یا ۴×۴، عدد محیط با عدد مساحت برابر است.

۲۳. عد دورقمی را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم. بنابر آن‌چه مساله گفته است، باید داشته باشیم:

$$۱۰a + b = a^۲ + b^۳$$

این برابری را، به‌سادگی می‌توان به این صورت نوشت:

$$a(10 - a) = (b - 1) \cdot b \cdot (b + 1)$$

سمت راست برابری، ضرب سه عدد طبیعی پشت سر هم و، بنابراین بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است. به‌این ترتیب، a عددی زوج است و، درضمن، برای این‌که $a(10 - a)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید $a = 6$ یا $a = 4$ باشد. در هریک از این دو حالت

$$(b - 1)b(b + 1) = 24 = 2 \times 3 \times 4$$

پاسخ. ۴۳ یا ۶۳.

۲۴. الف) مجهولی را که ضریب آن، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر است، برحسب مجهول دیگر پیدا می‌کنیم (در این‌جا، x را برحسب y):

$$x = \frac{3y + 1}{2} = y + \frac{y + 1}{2} \qquad (*)$$

باید $\frac{y+1}{2}$ عدد درستی باشد. این عدد درست را k می‌نامیم:

$$\frac{y + 1}{2} = k \Rightarrow y = 2k - 1$$

که اگر در برابری $(*)$ به‌جای y قرار دهیم، مقدار x هم برحسب k $(k \in \mathbf{Z})$ به‌دست می‌آید:

$$x = 2k - 1 + \frac{2k - 1 + 1}{2} = 3k - 1$$

پاسخ. $x = 3k - 1$، $y = 2k - 1$.

ب) x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

$$x = \frac{۱۲y + ۱۷}{۹} = y + ۲ + \frac{۳y - ۱}{۹}$$

$۳y - ۱$ به‌ازای عددهای طبیعی y، بر ۹ بخش‌پذیر نیست، زیرا در تقسیم $۳y - ۱$ بر ۳، همیشه باقی‌مانده‌ای برابر ۱− (یا ۲) به‌دست می‌آید، در حالی‌که ۹ بر ۳ بخش‌پذیر است. معادلهٔ مفروض، در مجموعهٔ عددهای درست، جواب ندارد.

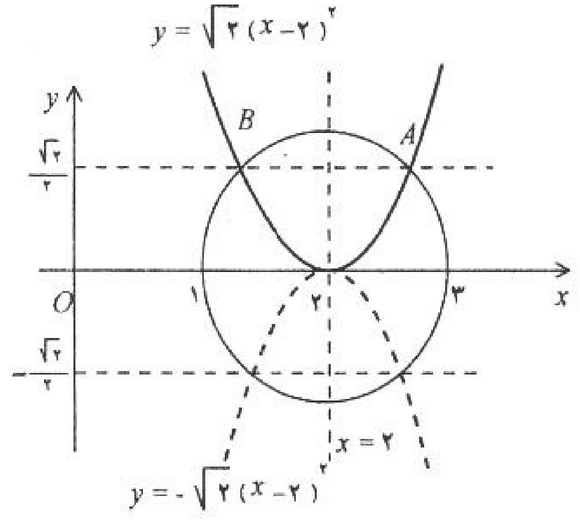
یادداشت. معادله‌ای که دارای دو مجهول یا تعداد بیشتری مجهول باشد، **معادلهٔ سیال** یا معادلهٔ **دیوفانتی** نام دارد. در معادله‌های سیال، بیشتر به جواب‌های درست (یا درست و مثبت) توجه می‌شود. در چنین حالتی، می‌توان جواب‌ها را پیدا کرد و یا ثابت کرد که جوابی وجود ندارد.

به این جهت این‌گونه معادله‌ها را، دیوفانتی گویند که، تا آن‌جا که معلوم است، دیوفانت ریاضی‌دان دوران مکتب اسکندریه، برای نخستین بار به آن‌ها پرداخت. از بین ریاضی‌دانان ایرانی، محمد کرجی، ریاضی‌دان سدهٔ دهم میلادی، معادله‌های سیال زیادی را (درجه دوم و سوم) حل کرد.

برای حل معادله‌های سیال درجه اول، به‌صورت

$$ax + by + c = ۰ \qquad (*)$$

می‌توان با همان روشی به نتیجه رسید که برای حل مسالهٔ ۲۴ (و چند مسالهٔ پیش از آن) استفاده کردیم. در ریاضیات می‌توان ثابت کرد: اگر در معادلهٔ $(*)$، a و b نسبت به هم اول نباشند، یعنی بخشیاب مشترکی داشته باشند، آن‌وقت، معادله در مجموعهٔ عددهای درست پاسخ ندارد. مسالهٔ ۲۴، ب) از این‌گونه بود، زیرا در آن $a = ۹$ و $b = -۱۲$، بخشیاب مشترکی برابر ۳



شکل ۳۶

یا ۳− داشتند و دیدیم که معادله، جواب درستی برای (x, y) نداشت. در جلدهای بعدی «ریاضیات محاسبه‌ای»، دربارهٔ معادله‌های سیال بیشتر صحبت خواهم کرد.

۲۵. معادلهٔ دایره را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۱$$

از این‌جا روشن می‌شود که مرکز دایره (یعنی راس سهمی) در نقطه $S(۲, ۰)$ قرار دارد (شکل ۳۶).

معادلهٔ سهمی را $y = ax^۲ + bx + c$ می‌گیریم (وقتی محور سهمی، موازی $y'y$ باشد، معادلهٔ آن، به این صورت است.) سهمی از راس خود می‌گذرد؛ بنابراین مختصات راس، در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$۴a + ۲b + c = ۰ \qquad (۱)$$

می‌دانیم، عرض راس سهمی از لحاظ قدرمطلق، کمترین مقدار در بین

عرض‌های نقطه‌های دیگر سهمی است. اگر معادلهٔ سهمی را به‌صورت

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲ - \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}\right]$$

بنویسیم، روشن می‌شود که، مقدار y، به‌ازای $x = -\frac{b}{۲a}$، ازلحاظ قدرمطلق، به کمترین مقدار خود می‌رسد (برای $a > ۰$، بیشترین مقدار، یعنی ماکزیمم؛ و برای $a < ۰$ کمترین مقدار یعنی می‌نیمم). طول راس سهمی برابر ۲ است، پس

$$-\frac{b}{۲a} = ۲ \Rightarrow b = -۴a \qquad (۲)$$

اگر در (۱)، به‌جای b، مقدارش $-۴a$ را بگذاریم:

$$۴a + ۲(-۴a) + c = ۰ \Rightarrow c = ۴a \qquad (۳)$$

باتوجه به (۱) و (۲) و (۳)، معادلهٔ سهمی به‌این صورت درمی‌آید:

$$y = ax^۲ - ۴ax + ۴a = a(x-۲)^۲ \qquad (۴)$$

هر دو منحنیِ دایره و سهمی، نسبت به خط راست $x = ۲$ (که از مرکز دایره و یا راس سهمی می‌گذرد) متقارن‌اند. بنابراین، نقطه‌های A و B (نقطه‌های برخورد سهمی با دایره)، عرض‌های برابر دارند، یعنی خط راستی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، با محور $x'x$ موازی است (شکل ۳۶)، یعنی برای پیدا کردن طول پاره‌خط راست AB، کافی است قدرمطلق تفاضل xهای آن‌ها را به‌دست آوریم. برای پیدا کردن xهای نقطه‌های A و B، مقدار y را

از معادلهٔ سهمی، به‌جای y در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم:

$$(x-۲)^۲+a^۲(x-۲)^۴-۱=۰ \Rightarrow (x-۲)۲=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴a^۲}}{۲a^۲};$$

باید جواب منفی را کنار بگذاریم. درنتیجه

$$x-۲=\pm\sqrt{\frac{-۱+\sqrt{۱+۴a^۲}}{۲a^۲}} \Rightarrow x=۲\pm\sqrt{\frac{-۱+\sqrt{۱+۴a^۲}}{۲a^۲}}$$

این‌ها، طول‌های نقطه‌های A و B هستند) و طول پاره‌خط راست AB، برابر است با قدرمطلق تفاضل این دو مقدار که باید برابر $\sqrt{۲}$ باشد:

$$۲\sqrt{\frac{-۱\sqrt{۱+۴a^۲}}{۲a^۲}}=\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{-۱+\sqrt{۱+۴a^۲}}{a^۲}=۱$$

این معادلهٔ گنگ، به‌سادگی حل می‌شود:

$$\sqrt{۱+۴a^۲}=۱+a^۲ \Rightarrow a^۴-۲a^۲=۰ \Rightarrow a=\pm\sqrt{۲}$$

$a \neq ۰$، زیرا به‌ازای $a=۰$، سهمی نخواهیم داشت.

پاسخ. $y=\sqrt{۲}(x-۲)^۲$ یا $y=-\sqrt{۲}(x-۲)^۲$

۲۶. ۱) *راهنمایی.* سهمی باید از نقطهٔ با مختصات $\left(۰,\frac{۳}{۲}\right)$ بگذرد؛ مختصات این نقطه باید در معادلهٔ سهمی صدق کند.

پاسخ. $a=-\frac{۳}{۲}$؛ $y=\frac{۱}{۲}(۲x^۲-۵x+۳)$.

۲) نقطه یا نقطه‌های برخورد سهمی با محور $x'x$، بافرض $y = 0$ به‌دست می‌آید. بنابراین طول‌های نقطه‌های برخورد سهمی با محور $x'x$، از این معادلهٔ درجه دوم به‌دست می‌آید:

$$x^2 + (a - 1)x - a = 0 \qquad (*)$$

اگر بخواهیم سهمی با محور $x'x$، نقطهٔ مشترکی نداشته باشد، باید مبین این معادلهٔ درجه دوم منفی باشد. ولی

$$\Delta = (a - 1)^2 + 4a = (a + 1)^2$$

و $(a + 1)^2$ نمی‌تواند منفی باشد: در حالت $a \neq -1$، سهمی محور $x'x$ را در دو نقطه قطع می‌کنند. طول‌های این دو نقطه، ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ هستند:

$$x = \frac{-(a - 1) \pm (a + 1)}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -a$$

سهمی، همیشه از نقطه‌های $(1, 0)$ و $(-a, 0)$ می‌گذرد.

در حالت $a = -1$، به‌دست می‌آید $x_1 = x_2 = 1$. دو نقطهٔ برخورد محور $x'x$ با سهمی، بر هم منطبق و محور $x'x$ بر سهمی مماس می‌شود. نقطهٔ تماس، همان راس سهمی (نقطهٔ می‌نیمم منحنی) است.

۳) معادلهٔ سهمی را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$y = \left(x + \frac{a - 1}{2}\right)^2 - \frac{(a - 1)^2}{4} - a =$$
$$= \left(x + \frac{a - 1}{2}\right)^2 - \frac{(a + 1)^2}{4}$$

و روشن است که، به‌ازای مقدارهای مختلف x داریم:

$$\left(x+\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{4}\geq -\frac{(a+1)^2}{4}$$

یعنی راس سهمی، پایین‌ترین نقطهٔ آن است (نقطهٔ می‌نیمم) و، این نقطه، به‌ازای $x=-\frac{a-1}{2}$ به‌دست می‌آید. پس

$$-\frac{a-1}{2}=1\Rightarrow a=-1$$

و معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ درمی‌آید. در این حالت، سهمی در نقطهٔ $(1,0)$ بر محور $x'x$ مماس است.

۴) دوباره معادلهٔ سهمی را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$y=\left(x+\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{4}$$

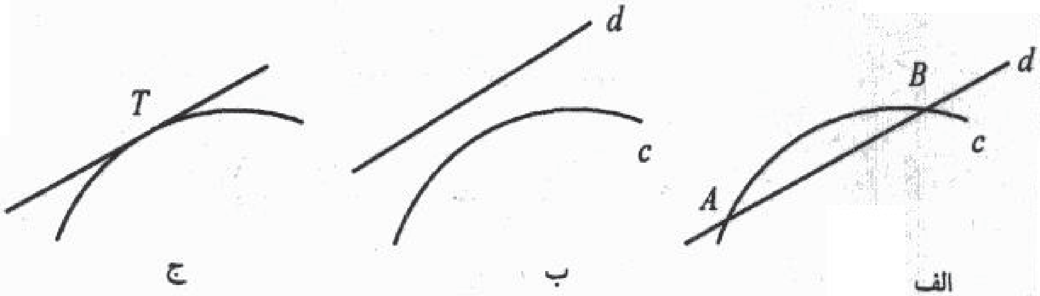
$S\left(-\frac{a-1}{2},\ -\frac{(a+1)^2}{4}\right)$ راس سهمی و عرض این راس برابر $-\frac{(a+1)^2}{4}$ است. پس

$$-\frac{(a+1)^2}{4}=-1\Rightarrow (a+1)^2=4\Rightarrow a_1=1,\ a_2=-3$$

سهمی‌های $y=x^2-1$ و $y=x^2-4x+3$ دارای می‌نیممی برابر -1 هستند (یعنی نقطهٔ راس هریک از آن‌ها، عرضی برابر -1 دارد).

۵) به شکل ۳۷ توجه کنید. در شکل به روشنی دیده می‌شود که خط راست d نسبت به منحنی c، در سه وضع متفاوت می‌تواند قرار گیرد.

الف) خط راست d، منحنی را در نقطهٔ A و B قطع کرده است. در این حالت، اگر معادلهٔ خط راست d و معادله منحنی c را در یک دستگاه



شکل ۳۷

قرار دهیم، باید برای دستگاه، دو جواب (همان مختصات نقطه‌های A و B) به‌دست آید.

ب) خط راست d، با منحنی c، نقطهٔ مشترکی ندارد. در این حالت، دستگاه شامل معادله‌های خط راست d و منحنی c، بدون جواب است.

ج) خط راست d بر منحنی c مماس است. این حالت را می‌توان با حالت الف مقایسه کرد: دو نقطهٔ A و B در حالت الف، در این‌جا بر هم منطبق و به‌صورت یک نقطهٔ T درآمده‌اند. T، دو نقطهٔ منطبق بر هم است و این، به معنای آن است که دستگاه شامل معادله‌های خط راست d و منحنی c، دو جواب دارد، ولی این دو جواب با هم برابرند.

اگر منحنی c، یک سهمی، یعنی نسبت به x درجه دوم باشد، دستگاه شامل معادلهٔ خط راست و معادله سهمی، سرانجام، منجر به حل یک معادلهٔ درجه دوم می‌شود و می‌توان حالت‌های الف، ب و ج را به‌این ترتیب توضیح داد:

الف) اگر معادلهٔ درجه دوم ناشی از دستگاه شامل معادله‌های خط راست و سهمی، دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، آن‌وقت خط راست، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

ب) اگر این معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌های موهومی داشته باشد، خط راست و سهمی، نقطهٔ مشترکی ندارند.

ج) اگر معادله درجه دوم ما، دو ریشهٔ برابر (یعنی یک ریشهٔ مضاعف) داشته باشد، خط راست بر سهمی مماس است. نتیجه‌گیری اخیر کلی است و می‌تواند به این صورت بیان شود:

خط راست و منحنی، یا دو منحنی، وقتی بر هم مماس‌اند که، دستگاه شامل معادله‌های آن‌ها، دو جواب برابر داشته باشند؛ برعکس، اگر دستگاه شامل مجهول‌های x و y، دو جواب برابر داشته باشد، به‌معنای آن است که نمودارهای دو معادلهٔ دستگاه، بر یکدیگر مماس‌اند.

در این‌جا، مساله از ما خواسته است، خط راست به معادلهٔ $2x+y = 2$ بر نمودار سهمی مماس باشد. دستگاه شامل معادله‌های خط راست و سهمی را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y = x^2 + (a-1)x - a \end{cases} \Rightarrow x^2 + (a+1)x - (a+2) = 0$$

اگر بخواهیم، خط راست و سهمی بر هم مماس باشند، باید این معادلهٔ درجه دوم، دو ریشه برابر داشته باشد، یعنی مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = (a+1)^2 + 4(a+2) = (a+3)^2 = 0 \Rightarrow a = -3$$

به‌ازای $a = -3$، معادله سهمی به‌صورت $y = x^2 - 4x + 3$ درمی‌آید. برای پیدا کردن نقطهٔ مشترک آن (نقطهٔ تماس) با خط راست، باید معادله‌های آن‌ها را در یک دستگاه قرار دهیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = 0$$

پاسخ. $a = -3$؛ نقطهٔ تماس خط راست با سهمی، به‌ازای $a = -3$، نقطهٔ $T(1, 0)$ است.

۶) اگر دو سهمی خاص از منحنی‌های (۱) را، مثلاً به‌ازای $a = ۰$ و $a = ۱$ در نظر بگیریم:

$$a = ۰ \Rightarrow y = x^۲ - x;\ a = ۱ \Rightarrow y = x^۲ - ۱$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که در نقطهٔ $(۱, ۰)$ یکدیگر را قطع می‌کنند و چون مختصات این نقطه، در معادلهٔ کلی سهمی‌های (۱) صدق می‌کند، همین نقطه، نقطهٔ ثابت سهمی‌های (۱) است. همهٔ سهمی‌های (۱) از نقطهٔ $(۱, ۰)$ می‌گذرند.

می‌توانستیم، معادلهٔ سهمی‌ها را، نسبت به پارامتر a منظم کنیم و، نسبت به a، متحد با صفر قرار دهیم:

$$y = x^۲ + (a - ۱)x - a \Rightarrow (x - ۱)a + (x^۲ - x - y) = ۰$$

که از آن‌جا، به دستگاه زیر، برای x و y، می‌رسیم:

$$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \\ x^۲ - x - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۱ \\ y = ۰ \end{array} \right.$$

نقطهٔ $(۱, ۰)$، تنها نقطهٔ ثابت منحنی، به‌ازای مقدارهای مختلف a است.

۷) ضمن حل مسالهٔ ۲۶، ۴)، مختصات راس سهمی را برحسب a به‌دست آوردیم:

$$S\left(x = -\frac{a - ۱}{۲},\ y = -\frac{(a + ۱)^۲}{۴}\right)$$

برای این‌که معادلهٔ مسیر راس سهمی را پیدا کنیم، باید رابطه‌ای بین x و y این راس به‌دست آوریم که به a بستگی نداشته باشد. به زبان دیگر، باید

پارامتر a را بین x و y نقطهٔ S حذف کنیم. اگر a را برحسب x محاسبه کنیم و آن را به‌جای a، در y قرار دهیم، به معادلهٔ $y = -x^۲$ می‌رسیم که یک‌سهمی است و نمودار آن، در مبداء مختصات بر محور $x'x$ مماس است.

۸) الف. معادلهٔ سهمی به‌ازای $a = ۲$، به‌صورت $y = x^۲ + x - ۲$ درمی‌آید. دستگاه شامل معادلهٔ سهمی و معادلهٔ خط راست $y = x + m$، مختصات نقطه‌های برخورد آن‌ها، یعنی A و B را به ما می‌دهد:

$$\begin{cases} y = x^۲ + x - ۲ \\ y = x + m \end{cases} \Rightarrow x^۲ = m + ۲$$

از آن‌جا $A \left| \begin{array}{l} \sqrt{m+۲} \\ m + \sqrt{m+۲} \end{array} \right.$ و $B \left| \begin{array}{l} -\sqrt{m+۲} \\ m - \sqrt{m+۲} \end{array} \right.$. این نقطه‌ها وقتی وجود دارند که داشته باشیم: $m \geq -۲$. به‌ازای این مقدارهای m، مختصات نقطهٔ P، وسط پاره‌خط راست AB، چنین می‌شود:

$$P(x = ۰,\ y = m)$$

مکان نقطهٔ P، نیم‌خط راست P_y است که، در آن $P(۰, -۲)$ و P_y منطبق بر محور $y'y$ و در جهت مثبت آن است.

ب. با حل دستگاه شامل خط راست $y = mx$ و سهمی، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم

$$x^۲ - (m - ۱)x - ۲ = ۰ \qquad (*)$$

این معادله، وقتی ریشهٔ حقیقی دارد که مبین آن مثبت باشد:

$$\Delta = (m - ۱)^۲ + ۸$$

و به روشنی معلوم است که $\Delta > 0$. خط راست، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی m، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر نقطه‌های برخورد را A و B و ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ را x_1 و x_2 بنامیم:

$$A(x_1, mx_1) \text{ و } B(x_2, mx_2)$$

و بنابراین، مختصات نقطهٔ P، وسط پاره‌خط راست AB، چنین می‌شود:

$$x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-1}{2},\ y_P = \frac{m(x_1+x_2)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

باید بین x و y نقطهٔ P، پارامتر m را حذف کنیم تا مکان آن به‌دست آید.

پاسخ. $y = 2x^2 + x$. همهٔ نمودار این سهمی، جزو مکان است.

۹) راهنمایی. شبیه مسالهٔ ۲۶، ۸ حل کنید.

پاسخ. $y = -x^2$ با شرط $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \le x \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

۲۷. با قرار دادن $x = 2$ در معادلهٔ سهمی، عرض نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید: $y = 3$. اگر ضریب زاویهٔ خط راست مماس بر سهمی را برابر m بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌این صورت درمی‌آید:

$$y - 3 = m(x-2) \Rightarrow y = mx - 2m + 3 \qquad (*)$$

خط راست به‌شرطی بر یک منحنی مماس است که، حل دستگاه شامل معادله‌های خط راست و منحنی، منجر به حل معادله‌ای با دو ریشهٔ برابر شود:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 3 \\ y = mx - 2m + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (m-5)x - 2m + 6 = 0$$

برای این‌که معادلهٔ درجه دوم، دو ریشهٔ برابر (یعنی یک ریشهٔ مضاعف) داشته باشد، باید مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = (m-۵)^۲ - ۴(-۲m+۶) = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

با قرار دادن $m = ۱$ در معادلهٔ $(*)$، معادلهٔ مماس بر سهمی در نقطهٔ به طول ۲ به‌دست می‌آید: $y = x + ۱$.

پاسخ. مماس، در نقطه‌های $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱-)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

۲۸. راه‌حل شبیه مسالهٔ قبل است. نقطهٔ به طول $\frac{۱}{۵}$ واقع بر محور $x'x$ را با $M\left(\frac{۱}{۵}, ۰\right)$ نشان می‌دهیم. از نقطهٔ M، بی‌نهایت خط راست می‌گذرند؛ ضریب زاویهٔ عمومی این خط‌های راست را m می‌گیریم. معادلهٔ

$$y = m\left(x - \frac{۱}{۵}\right) \Rightarrow y = mx - \frac{۱}{۵}m$$

معادلهٔ عمومی خط‌های راستی است که از M می‌گذرند. از بین این خط‌های راست، به آن‌هایی نیاز داریم که بر سهمی

$$y = (x-۱)(x-۲) = x^۲ - ۳x + ۲$$

مماس باشند. به‌یاری معادلهٔ سهمی و معادلهٔ عمومی خط راست، دستگاه تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۳x + ۲ \\ y = mx - \frac{۱}{۵}m \end{cases} \Rightarrow ۵x^۲ - ۵(m+۳)x + m + ۱۰ = ۰$$

در حالتی که این معادلهٔ درجه دوم، ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، خط راست سهمی را قطع نمی‌کند؛ به‌ازای مقدارهایی از m که این معادله دو ریشهٔ حقیقی مختلف داشته باشد، خط راست منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند. ولی ما می‌خواهیم، خط راست بر منحنی مماس باشد، بنابراین، این معادله باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد، یعنی مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = ۲۵(m+۳)^۲ - ۲۰(m+۱۰) = ۰ \Rightarrow ۵m^۲ + ۲۶m + ۵ = ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $m_۱ = -۵$، $m_۲ = -\frac{۱}{۵}$ اگر هریک از این دو مقدار را به‌جای m در معادلهٔ عمومی خط‌های راست قرار دهیم، معادله‌های دو خط راستی که از M می‌گذرند و بر سهمی مماس‌اند، به‌دست می‌آید:

$$y = -۵x + ۱ \text{ و } y = -\frac{۱}{۵}x + \frac{۱}{۲۵}$$

یادداشت. به‌ازای هریک از دو مقدار $m = -۵$ و $m = -\frac{۱}{۵}$، معادلهٔ درجه دوم دارای ریشهٔ مضاعف (یعنی دو ریشهٔ برابر) است و این ریشه از رابطهٔ

$$x_۱ = x_۲ = -\frac{b}{۲a} = \frac{۵(m+۳)}{۱۰} = \frac{m+۳}{۲}$$

به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، می‌توان طول و، سپس، عرض‌های نقطه‌های تماس را پیدا کرد. اگر نقطه‌های تماس را $T_۱$ و $T_۲$ بنامیم، به‌دست می‌آید:

$$T_۱(-۱, ۶) \text{ و } T_۲\left(-\frac{۱}{۵}, -\frac{۶}{۲۵}\right)$$

۲۹. اگر نقطه‌ای روی سهمی باشد، باید مختصات آن در معادلهٔ سهمی صدق کند. تنها مختصات نقطهٔ A، در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند. برای

نقطه‌های دیگر، می‌توان نمودار سهمی را در دستگاه محورهای مختصات رسم و، سپس، مشاهده کرد، آیا نقطهٔ مورد نظر در درون منحنی است یا در بیرون آن.

بدون رسم و با محاسبه هم می‌توان مساله را حل کرد. برای این منظور، باید به این نکته توجه داشت:

نقطه‌ای در بیرون سهمی است که از آن‌جا بتوان دو مماس بر سهمی رسم کرد؛ نقطه‌ای در درون سهمی است که از آن‌جا نتوان مماسی بر سهمی رسم کرد و، سرانجام، نقطه‌ای روی منحنی سهمی است که از آن تنها یک مماس (یعنی درواقع، دو مماس منطبق بر هم) بر سهمی رسم شود.

پاسخ. A روی سهمی؛ C بیرون سهمی؛ B و D درون سهمی واقع‌اند.

۳۰. عبارت سمت چپ برابری در معادلهٔ درجه سوم مفروض قابل تجزیه است. ساده‌ترین راه تجزیهٔ این عبارت، منظم کردن آن بر حسب پارامتر m است:

$$\begin{aligned}
&x^۳ - (۲m + ۱)x^۲ + (m + ۱)x + m - ۱ = \\
&= (x^۳ - x^۲ + x - ۱) - m(۲x^۲ - x - ۱) = \\
&= x^۲(x - ۱) + (x - ۱) - m(۲x + ۱)(x - ۱) = \\
&= (x - ۱)(x^۲ - ۲mx + ۱ - m)
\end{aligned}$$

مساله به این‌جا منجر می‌شود که معادلهٔ درجه سوم

$$(x - ۱)(x^۲ - ۲mx + ۱ - m) = ۰ \qquad (۱)$$

دو ریشهٔ برابر داشته باشد. یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱) برابر است با

$x = ۱$. بنابراین، در دو حالت ممکن است معادلهٔ (۱)، دو ریشهٔ برابر داشته باشد.

حالت اول، وقتی $x = ۱$، ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باشد. در این حالت، باید $x = ۱$ در معادلهٔ

$$x^۲ - ۲mx + ۱ - m = ۰$$

صدق کند که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $m = \frac{۲}{۳}$ و معادلهٔ درجه سوم (۱) چنین می‌شود:

$$(x - ۱)\left(x^۲ - \frac{۴}{۳}x + \frac{۱}{۳}\right) = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲\left(x - \frac{۱}{۳}\right) = ۰$$

که دو ریشهٔ برابر دارد: $x_۱ = x_۲ = ۱$ و $x_۳ = \frac{۱}{۳}$.

حالت دوم، وقتی معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۲mx + ۱ - m = ۰$$

دو ریشهٔ برابر داشته باشد که، در این صورت، باید داشته باشیم:

$$m^۲ + m - ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

به‌ازای $m = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$، معادلهٔ (۱)، به این صورت درمی‌آید:

$$(x-۱)\left(x - \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}\right)^۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ = x_۲ = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲},\ x_۳ = ۱$$

و به‌ازای $m = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ x_3 = 1$$

۳۱. ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی را m می‌گیریم و معادلهٔ خط راستی را که از $A(-1, 0)$ می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای برابر m دارد، می‌نویسیم: $y = mx + m$. اگر این خط راست بخواهد بر منحنی مماس باشد، باید ضمن حل دستگاه شامل معادلهٔ منحنی و این خط راست، به معادله‌ای با دو ریشهٔ برابر برسیم.

این معادله درجه سوم است و به‌صورت

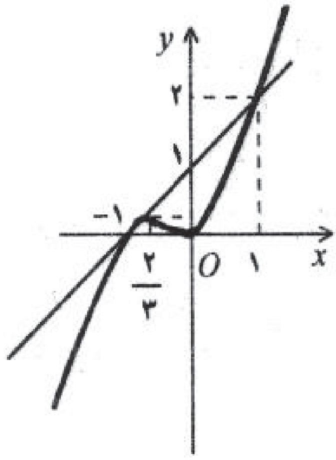
$$x^3 + x^2 - m(x+1) = 0$$

درمی‌آید که قابل تجزیه است:

$$(x+1)(x^2 - m) = 0$$

یکی از ریشه‌های این معادله $x = -1$ است. اگر بخواهیم ریشهٔ دیگر این معادله، برابر -1 باشد، باید $x = -1$ در معادلهٔ $x^2 - m = 0$ صدق کند، از آن‌جا، به‌دست می‌آید $m = 1$ و معادله خط مماس، به‌صورت $y = x + 1$ درمی‌آید.

در حالتی که بخواهیم $x^2 - m = 0$، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، به جواب $m = 0$ می‌رسیم که، در این صورت، خط راست $y = 0$ (محور $x'x$)، مماس بر منحنی می‌شود.



شکل ۳۸

پاسخ. از نقطهٔ $A(-۱, ۰)$، دو مماس به معادله‌های $y = x + ۱$ و $y = ۰$ بر منحنی رسم می‌شود. نقطهٔ A، روی نمودار $y = x^۳ + x^۲$ است و، به همین مناسبت، تنها دو مماس به‌دست می‌آید. در حالت کلی، از نقطه‌ای که روی منحنی درجه سوم نباشد، می‌توان سه مماس بر آن رسم کرد. برای درک بهتر مساله، شکل ۳۸ را ببینید.

۳۲. اگر در بین این ۸ عدد، کوچکترین عدد را از هریک از ۷ عدد دیگر، کم کنیم، ۷ تفاضل و اگر دومین عدد را از ۶ عدد بزرگتر از خودش کم کنیم، ۶ تفاضل و غیره به‌دست می‌آید. بنابراین، تعداد تفاضل‌های دوبه‌دوی این عددها (به‌شرطی که همیشه عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کنیم)، برابر است با

$$۷ + ۶ + \ldots + ۱ = ۲۸$$

(می‌توانیم از دستور مجموع جمله‌های یک تصاعد حسابی استفاده کنیم). از طرف دیگر، این تفاضل‌ها، حداقل برابر ۱ و حداکثر برابر ۱۴ هستند. تفاضل ۱۴، تنها یک بار ممکن است پیش آید (وقتی که عددهای ۱ و ۱۵ در بین ۸ عدد انتخابی باشند)، ولی تفاضل‌های دیگر ممکن است چند بار بیابید، مثلاً

اگر عددهای ۱ و ۲ و ۱۴ و ۱۵، بین عددهای انتخابی ما باشند، آن‌وقت

$$۱۵ - ۲ = ۱۳, \quad ۱۴ - ۱ = ۱۳$$

اگر حالتی را که ممکن است یکی از تفاضل‌ها برابر ۱۴ باشد، کنار بگذاریم، ۱۳ نوع تفاضل باقی می‌ماند، در حالی که تعداد کل تفاضل‌ها برابر ۲۷ است. اگر از ۱۳ نوع تفاضل ممکن، هیچ‌کدام، بیش از ۲ بار تکرار نشده باشد، روی‌هم ۲۶ تفاضل به‌دست می‌آید. بنابراین، دست‌کم یکی از تفاضل‌ها سه بار تکرار شده است.

۳۳. این چندجمله‌ای را، با فرض این‌که ضریب‌های آن عددهای درستی باشند، در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + cx^۲ + dx + e \qquad (۱)$$

اگر α و β را دو عدد درست فرض کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(\alpha) - f(\beta) = a(\alpha^n - \beta^n) + b(\alpha^{n-۱} - \beta^{n-۱}) +$$
$$+ \ldots + c(\alpha^۲ - \beta^۲) + d(\alpha - \beta)$$

هریک از جمله‌های این عبارت بر $\alpha - \beta$ بخش‌پذیر است، بنابراین عبارت $f(\alpha) - f(\beta)$ هم بر $\alpha - \beta$ بخش‌پذیر می‌شود.

وقتی $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضریب‌های درست باشد، آن‌وقت $f(۱۸) - f(۷)$ بر $۱۸ - ۷$ یعنی ۱۱، و $f(۱۸) - f(۱۱)$ بر $۱۸ - ۱۱$ یعنی ۷ بخش‌پذیر است، بنابراین، با فرض درست بودن $k_۱$ و $k_۲$ می‌توان نوشت:

$$f(۱۸) - f(۷) = ۱۱k; \; f(۱۸) - f(۱۱) = ۷k_۲$$

و یا

$$f(۱۸) = f(۷) + ۱۱k_۱;\ f(۱۸) = f(۱۱) + ۷k_۲$$

$f(۷)$ و $۱۱k_۱$ بر ۱۱ بخش‌پذیرند، پس مجموع آن‌ها $f(۱۸)$ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شود. به‌همین ترتیب، از برابری دوم نتیجه می‌شود که $f(۱۸)$ بر ۷ بخش‌پذیر است. ۷ و ۱۱ نسبت به هم اول‌اند. وقتی $f(۱۸)$ بر ۱۱ و ۷ بخش‌پذیر باشد، بر حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی ۷۷ بخش‌پذیر خواهد بود.

۳۴. در آغاز، دو نکته را به یاد می‌آوریم:

۱) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $a = ۱$ و b و c عددهای درستی باشند، دو ریشهٔ معادله، یا هردو عددهایی درست‌اند و یا هر دو عددهایی گنگ، یعنی معادله نمی‌تواند ریشه‌ای گویا و غیر درست داشته باشد.

۲) دو عدد گنگ $\alpha + \sqrt{\beta}$ و $\alpha' + \sqrt{\beta'}$، تنها وقتی برابرند که $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$.

ریشهٔ مشترک دو معادله را با حذف $x^۲$ بین دو معادله، پیدا می‌کنیم.

$$(a - a')x + b - b' = ۰$$

چون این ریشهٔ مشترک عددی درست نیست، باید برابر عددی گنگ مثل $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد. یعنی

$$(a - a')(\alpha + \sqrt{\beta}) + b - b' = ۰;$$
$$[\alpha(a - a') + b - b'] + (a - a')\sqrt{\beta} = ۰$$

و این برابری وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$(a - a')\alpha + b - b' = ۰,\ a - a' = ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $a = a'$ و $b = b'$، یعنی دو معادله بر هم منطبق‌اند.

۳۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)$، دورهٔ تناوبی برابر $۲a$ دارد؛ یعنی ثابت می‌کنیم: $f(x + ۲a) = f(x)$. چون مقدار رادیکال مثبت است، باتوجه به شرط مساله داریم: $f(x + a) > \frac{۱}{۲}$. اگر در شرط مساله، $\frac{۱}{۲}$ را به سمت چپ برابری ببریم و، برای آزاد کردن برابری از رادیکال، دو طرف را مجذور کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left[f(x+a) - \frac{۱}{۲}\right]^{۲} = f(x) - (f(x))^{۲};$$

$$(f(x+a))^{۲} - f(x+a) = f(x) - (f(x))^{۲} - \frac{۱}{۴} \quad (۱)$$

اکنون $f(x + ۲a)$ را، محاسبه می‌کنیم. در برابری شرط، x را به $x + a$ تبدیل می‌کنیم:

$$f(x + ۲a) = \frac{۱}{۲} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^{۲}}$$

که اگر، برای عبارت زیر رادیکال، از برابری (۱) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$f(x + ۲a) = \frac{۱}{۲} + \sqrt{(f(x))^{۲} - f(x) + \frac{۱}{۴}} =$$

$$= \frac{۱}{۲} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{۱}{۲}\right)^{۲}} = \frac{۱}{۲} + \left|f(x) - \frac{۱}{۲}\right| = f(x)$$

(به یاد داریم که $f(x) > \frac{۱}{۲}$). به این ترتیب $f(x + ۲a) = f(x)$ و تابع با ضابطهٔ $f(x)$، دورهٔ تناوبی برابر $۲a$ دارد.

۳۶. جملهٔ اول تصاعد را a و قدر نسبت آن را d می‌گیریم:

$$a, a+d, a+۲d, \ldots, a+۱۰d, \ldots, a+۱۰۰d, \ldots$$

روشن است که جمله‌های $a+۱۰d$، $a+۱۰۰d$ و $a+۱۰۰۰d$، ...، یعنی جمله‌های به‌صورت $a+۱۰^kd$، عددهایی هستند که، مجموع رقم‌های آن‌ها یکی است. به عنوان نمونه، این تصاعد حسابی را در نظر بگیرید:

$$۲۳, ۲۶, ۲۹, ۳۲, \ldots$$

($a=۲۳$ و $d=۳$). در این تصاعد داریم:

جملهٔ دوم (به‌ازای $k=۰$): ۲۶؛

جملهٔ یازدهم (به‌ازای $k=۲$): ۵۳؛

جمله صدویکم (به‌ازای $k=۲$): ۳۲۳؛

جملهٔ هزار و یکم (به‌ازای $k=۳$): ۳۰۲۳؛ ... و غیره.

و مجموع رقم‌ها، در هریک از عددهای ۲۶ و ۵۳، ۳۲۳، ۳۰۲۳ و غیره، برابر ۸ است.

۳۷. اگر عددهای عضو این مجموعه را به ردیف صعودی (یعنی از کم به زیاد) بنویسیم، تفاضل هر دو جمله از این مجموعه، همیشه کوچکتر از ۱۰۰ درمی‌آید، زیرا اگر به عنوان نمونه، از ۵۰ عدد طبیعی نخستین، تنها عدد ۱ و از ۵۰ عدد طبیعی بعدی، تنها عدد ۱۰۰ را انتخاب کرده باشیم، تفاضل آن‌ها برابر ۹۹ می‌شود و این، بزرگترین عددی است که از تفاضل جمله‌های متوالی مجموعه به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر ۱۰۱ جملهٔ متوالی از مجموعه را در نظر بگیریم، برای تفاضل‌های جمله‌های متوالی، ۱۰۰ عدد به‌دست می‌آید که همهٔ آن‌ها از ۱۰۰ کوچکترند و، چون تنها ۹۹ تفاضل

مختلف وجود دارد، دست‌کم دوتا از این تفاضل‌ها برابر می‌شوند، مثلاً

$$p - m = n - q \Rightarrow p + q = m + n$$

۳۸. عبات $n^۳ - ۳n^۲ + ۴$ قابل تجزیه است:

$$n^۳ - ۳n^۲ + ۴ = (n^۳ + n^۲) + (-۴n^۲ + ۴) =$$
$$= n^۲(n + ۱) - ۴(n + ۱)(n - ۱) =$$
$$= (n + ۱)(n^۲ - ۴n + ۴) = (n + ۱)(n - ۲)^۲$$

۱۷۳، عددی اول است (به‌جز ۱ و خودش، بر عدد دیگری بخش‌پذیر نیست). بنابراین $(n + ۱)(n - ۲)^۲$ تنها وقتی بر ۱۷۳ بخش‌پذیر است که یا $n + ۱$ و یا $n - ۲$ بر آن بخش‌پذیر باشد. کوچکترین عدد طبیعی که به‌ازای آن $n + ۱$ بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد $n = ۱۷۲$ و کوچکترین عدد n که به‌ازای آن $n - ۲$ بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد، $n = ۱۷۵$ است.

پاسخ. ۱۷۳×۱۷۰^۲ (به‌ازای $n = ۱۷۲$).

۳۹. فرض می‌کنیم به‌ازای مقدارهای درستی از a و b، دو ریشهٔ معادله، که آن‌ها را p و q می‌نامیم، وجود داشته باشند، به‌نحوی که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۳ شود ($pq = ۳$).

چون در معادلهٔ مفروض $x \neq ۰$، می‌توان دو طرف برابری معادله را بر $x^۲$ بخش کرد:

$$x^۲ + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{۱}{x^۲} = ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right) + a\left(x + \frac{۱}{x}\right) + b = ۰$$

اگر فرض کنیم $y = x + \frac{۱}{x}$، به‌دست می‌آید $x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = y^۲ - ۲$ و معادله چنین می‌شود:

$$y^۲ + ay + b - ۲ = ۰ \qquad (۱)$$

چون $y = x + \frac{۱}{x}$، پس $p + \frac{۱}{p}$ و $q + \frac{۱}{q}$، دو ریشهٔ این معادله‌اند. به‌یاری دستورهای ویت (دستورهایی که رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌ها را می‌دهند) به‌دست می‌آید.

$$\left(p + \frac{۱}{p}\right) + \left(q + \frac{۱}{q}\right) = -a \quad \text{و} \quad \left(p + \frac{۱}{p}\right)\left(q + \frac{۱}{q}\right) = b - ۲$$

از برابری اول به‌دست می‌آید:

$$(p + q) + \frac{p + q}{pq} = -a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}(p + q) = -a \Rightarrow p + q = -\frac{۳}{۴}a \Rightarrow$$

$$= p^۲ + q^۲ + ۲pq = \frac{۹}{۱۶}a^۲ \Rightarrow p^۲ + q^۲ = \frac{۹}{۱۶}a^۲ - ۶$$

و از برابری دوم

$$pq + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{۱}{pq} = b - ۲ \Rightarrow$$

$$= ۳ + \frac{p^۲ + q^۲}{۳} + \frac{۱}{۳} = b - ۲ \Rightarrow p^۲ + q^۲ = ۳b - ۱۶$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\frac{۹a^۲}{۱۶} - ۶ = ۳b - ۱۶ \Rightarrow ۹a^۲ = ۴۸b - ۱۶۰$$

ولی این برابری نمی‌تواند برای عددهای درست a و b برقرار باشد، زیرا $۹a^۲$ و $۴۸b$ بر ۳ بخش‌پذیر و ۱۶۰ بر ۳ بخش‌ناپذیر است.

اگر هم فرض کنیم $p = q$، آن‌وقت باید هر دو ریشه برابر $\sqrt{۳}$ یا هر دو ریشه برابر $-\sqrt{۳}$ باشند. درنتیجه باید $\sqrt{۳}$ یا $-\sqrt{۳}$ در معادله صدق کند. برای $x = \sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید:

$$۹ + ۳a\sqrt{۳} + ۳b + a\sqrt{۳} + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴a\sqrt{۳} + (۳b + ۱۰) = ۰$$

و به‌ازای $x = -\sqrt{۳}$: $-۴a\sqrt{۳} + (۳b + ۱۰) = ۰$. و در هرحال باید داشته باشیم:

$$a = ۰, \ ۳b + ۱۰ = ۰$$

که برای b، عددی درست به‌دست نمی‌آید.

پاسخ. چنین مقدارهای درستی برای a و b وجود ندارد.

۴۰. چون درجهٔ $x^{۲۵} + x^{۴}$ کوچکتر از درجهٔ $g(x)$ است، کافی است باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $f_۱(x) = x^{۱۳۷۵}$ بر $g(x)$ را به‌دست آوریم.

اگر $r(x)$ را باقی‌ماندهٔ تقسیم $f_۱(x)$ بر $g(x)$ بگیریم، آن‌وقت باید عبارت $f_۱(x) - r(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر باشد. بافرض $x^{۲۷} = y$، می‌توان $g(x)$ را این‌طور نوشت:

$$g(x) = (y + ۱)(y^۲ + y + ۱) =$$
$$= \frac{y^۳ + ۱}{y^۲ - y + ۱} \cdot \frac{y^۳ - ۱}{y - ۱} = \frac{y^۶ - ۱}{(y^۲ - y + ۱)(y - ۱)}$$

به‌این ترتیب $(y^۲ - y + ۱)(y - ۱)(f_۱(x) - r(x))$ بر $y^۶ - ۱$ بخش‌پذیر است و اگر فرض کنیم $r(x) = x^n$، باید عدد درست n را طوری پیدا

کنیم که چندجمله‌ای

$$f_1(x) - r(x) = x^{1375} - x^n = x^n(x^{1375-n} \quad - 1)$$

بر $x^{162} - 1 = y^6 - 1$ بخش‌پذیر باشد. برای این منظور باید $1375 - n$ بر ۱۶۲ ، بدون باقی‌مانده، بخش‌پذیر باشد:

$$\frac{1375 - n}{162} = 8 + \frac{79 - n}{162}$$

که از آن به‌دست می‌آید: $n = 79$.

درنتیجه $(y^2 - y + 1)(y - 1)(x^{1375} - x^{79})$ بر $y^6 - 1$ و $x^{1375} - x^{79}$ بر $(y - 1)(y^2 - y + 1)$، یعنی بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.

پاسخ. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$، عبارت است از $x^{79} + x^{25} + x^4$.

یادداشت. ضمن حل مسالهٔ ۴۰، از این قضیه استفاده کردیم:

دوجمله‌ای $x^m - 1$ بر دوجمله‌ای $x^n - 1$، وقتی و تنها وقتی بخش‌پذیر است که عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n بخش‌پذیر باشد.

۴۱. ریشه‌های معادلهٔ $\sin \pi x = 0$ عبارتند از مجموعهٔ همهٔ عددهای درست، زیرا

$$\sin \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi \Rightarrow x = k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

بنابراین، ریشه‌های مثبت معادلهٔ مفروض در سه حالت به تصاعد حسابی هستند.

۱) وقتی معادلهٔ $x^2 + ax + 7 = 0$ ریشه‌های موهومی داشته باشد که در این صورت باید داشته باشیم:

$$a^2 - 28 < 0 \Rightarrow -2\sqrt{7} < a < 2\sqrt{7}$$

۲) معادلهٔ $x^{۲} + ax + ۷ = ۰$، ریشه‌های منفی داشته باشد. حاصل‌ضرب دو ریشهٔ این معادله برابر ۷ و مثبت است. بنابراین، وقتی دو ریشهٔ منفی دارد که، مجموع ریشه‌های آن، یعنی $-a$، منفی باشد. بنابراین برای وجود دو ریشهٔ منفی، باید معادله دو ریشه حقیقی داشته باشد و، درضمن داشته باشیم $a > ۰$.

۳) معادلهٔ $x + ax + ۷ = ۰$ دو ریشهٔ مثبت و درست داشته باشد که تنها به‌ازای $a = -۸$ ممکن است. به‌ازای $a = -۸$، دو ریشهٔ مثبت ۱ و ۷ را دارد.

پاسخ. $a > -۲\sqrt{۲}$ و $a = -۸$.

۴۲. عبارت A را می‌توان این‌طور نوشت:

$$A = \left[f\left(\frac{۱}{۱۳۷۶}\right) + f\left(\frac{۱۳۷۵}{۱۳۷۶}\right)\right] + $$
$$+ \left[f\left(\frac{۲}{۱۳۷۶}\right) + f\left(\frac{۱۳۷۴}{۱۳۷۶}\right)\right] + \dots$$
$$\dots + \left[f\left(\frac{۶۸۷}{۱۳۷۶}\right) + f\left(\frac{۶۸۹}{۱۳۷۶}\right)\right] + f\left(\frac{۶۸۸}{۱۳۷۶}\right)$$

از طرف دیگر، روشن است که

$$\frac{۱}{۱۳۷۶} + \frac{۱۳۷۵}{۱۳۷۶} = ۱;\ \frac{۲}{۱۳۷۶} + \frac{۱۳۷۴}{۱۳۷۶} = ۱, \dots$$
$$\dots, \frac{۶۸۷}{۱۳۷۶} + \frac{۶۸۹}{۱۳۷۶} = ۱;\ \frac{۶۸۸}{۱۳۷۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین، به شرط $a + b = ۱$، عبارت A به این صورت درمی‌آید:

$$A = [f(a) + f(b)] + [f(a) + f(b)] +$$

$$+\ldots+[f(a)+f(b)]+f\left(\frac{۱}{۲}\right)=$$
$$=۶۸۷[f(a)+f(b)]+f\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$f(a)+f(b)$ را، با شرط $a+b=۱$، همچنین $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(a)+f(b)=\frac{۴^a}{۴^a+۲}+\frac{۴^b}{۴^b+۲}=$$
$$=\frac{۴^a(۴^b+۲)+۴^b(۴^a+۲)}{(۴^a+۲)(۴^b+۲)}=$$
$$=\frac{۲\times ۴^{a+b}+۲(۴^a+۴^b)}{۴^{a+b}+۲(۴^a+۴^b)+۴}=۱;$$
$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۴^{\frac{۱}{۲}}}{۴^{\frac{۱}{۲}}+۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

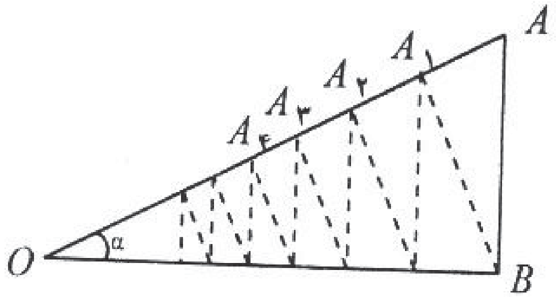
از این‌جا

$$A=۶۸۷\times ۱+\frac{۱}{۲}=۶۸۷\frac{۱}{۲}$$

۴۳. کمان φ هرچه باشد، می‌توان آن را به‌صورت

$$\varphi=k\pi\pm\alpha\ (k=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ldots)$$

نوشت که، در آن، $۰\leq\alpha\leq\frac{\pi}{۲}$. بنابراین $\cos^۲\varphi=\cos^۲\alpha$ و، باتوجه به شرط مساله، می‌توان کمان مفروض را، زاویه‌ای حاده و مثبت به‌حساب آورد. حالت $\alpha=۹۰^\circ$ بی‌معنا است و در حالت $\alpha=۰^\circ$، مساله، منجر به تقسیم یک پاره‌خط راست، به چند بخش برابر می‌شود. بنابراین فرض



شکل ۳۹

می‌کنیم:

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB را طوری می‌سازیم (شکل ۳۹) که، در آن، داشته باشیم.

$$\widehat{B} = 90^\circ,\ \widehat{AOB} = \alpha,\ |OA| = 1$$

از نقطهٔ B عمود BA_1 بر وتر OA رسم می‌کنیم، طول پاره‌خط راست OA_1 (تصویر OB بر OA) را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos\alpha = \frac{|OA_1|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{\cos\alpha} \Rightarrow |OA_1| = \cos^2\alpha$$

به همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$|OA_2| = \cos^4\alpha,\ |OA_3| = \cos^6\alpha, \ldots |OA_n| = \cos^{2n}\alpha$$

بنابراین، برای حل مساله، باید پاره‌خط راست مفروض را، به‌نسبت پاره‌خط‌های راست OA، OA_1، OA_2، ...، OA_n بخش کرد که کار دشواری نیست.

۴۴. چون $(n-۴)(n-۱) = n^۲ - ۵n + ۴$، بنابراین

$$\sum_{n=۵}^{۱۰۰}(n-۴)(n-۱) = \sum_{n=۵}^{۱۰۰} n^۲ - ۵\sum_{n=۵}^{۱۰۰} n + ۴\sum_{n=۵}^{۱۰۰} n^{۰}$$

(۴ را $۴n^{۰}$ در نظر گرفتیم). ولی داریم:

$$\sum_{n=۵}^{۱۰۰} n^{۰} = \underbrace{۱+۱+۱+\ldots+۱}_{\text{۹۶ بار}} = ۹۶;$$

$$\sum_{n=۵}^{۱۰۰} n = ۵+۶+۷+\ldots+۱۰۰ =$$

$$= ۱+۲+۳+\ldots+۱۰۰-(۱+۲+۳+۴) =$$

$$= \frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲} - ۱۰ = ۵۰۵۰ - ۱۰ = ۵۰۴۰;$$

$$\sum_{n-۵}^{۱۰۰} n^۲ = \sum_{n=۱}^{۱۰۰} n^۲ - (۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲) =$$

$$= \frac{۱۰۰\times۱۰۱\times۲۰۱}{۶} - ۳۰ = ۳۳۸۳۲۰$$

در این محاسبه‌ها، از این برابری‌ها استفاده کردیم (جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» صفحهٔ ۲۱۵ مساله ۲۴۶):

$$\sum_{n=۱}^{n} n = ۱+۲+\ldots+n = \frac{n(n+۱)}{۲};$$

$$\sum_{n=۱}^{n} n^۲ = ۱^۲+۲^۲+\ldots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

به‌این ترتیب به دست می‌آید:

$$\sum_{n=۵}^{۱۰۰}(n-۴)(n-۱) = ۳۳۸۳۲۰ - ۵\times۵۰۴۰ + ۴\times۹۶ = ۳۱۳۵۰۴$$

۴۵. به‌ترتیب داریم:

$$\prod_{n=۱}^{۸۹} \cot n^\circ = \cot ۱^\circ \cot ۲^\circ \ldots \cot ۸۸^\circ \cot ۸۹^\circ =$$
$$= (\cot ۱^\circ \cot ۸۹^\circ)(\cot ۲^\circ \cot ۸۸^\circ)\ldots(\cot ۴۴^\circ \cot ۴۶^\circ)\cot ۴۵^\circ$$
$$= (\cot ۱^\circ \tan ۱^\circ)(\cot ۲^\circ \tan ۲^\circ)\ldots(\cot ۴۴^\circ \tan ۴۴^\circ)\tan ۴۵^\circ = ۱$$

.۴۶

$$۱)\ \sum x_i^۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ =$$
$$= (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ = ۲^۲ - ۲ \times ۵ = ۴ - ۱۰ = -۶;$$
$$۲)\ (\sum x_i)^۲ = (x_۱ + x_۲)^۲ = ۲^۲ = ۴;$$
$$۳)\ \sum x_i^۳ = x_۱^۳ + x_۲^۳ = (x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲) =$$
$$= ۲^۳ - ۳ \times ۵ \times ۲ = ۸ - ۳۰ = -۲۲;$$

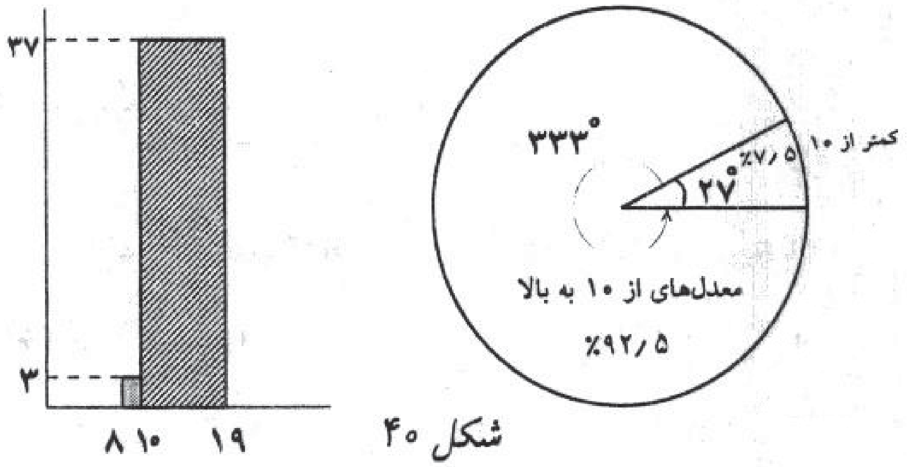
۴) $A = \sum \sqrt{x_i} = \sqrt{x_۱}\sqrt{x_۲}$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$A^۲ = x_۱ + x_۲ + ۲\sqrt{x_۱x_۲} = ۲ + ۲\sqrt{۵}$$

بنابراین $A = \sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} = \sqrt{۲ + ۲\sqrt{۵}}$.

۴۷. میانگین معدل کلاس، برابر است با $\frac{۱}{۴۰}$ مجموع معدل‌ها که برابر ۱۳/۸۴۵ می‌شود.

جدول پراکندگی معدل را، بسته به نیاز، به شیوه‌های مختلف می‌توان تنظیم کرد. مثلاً اگر بخواهیم دانش‌آموزانی را که قبول شده‌اند، از دانش‌آموزانی که در همان کلاس باقی می‌مانند، جدا کنیم، برای جدول پراکندگی، نمودار



شکل ۴۰

ستونی و نمودار دایره‌ای، جدول ۱ و شکل ۴۰ به‌دست می‌آید.

فراوانی	معدل نمره
۳	از ۸ تا کمتر از ۱۰
۳۷	از ۱۰ به بالا

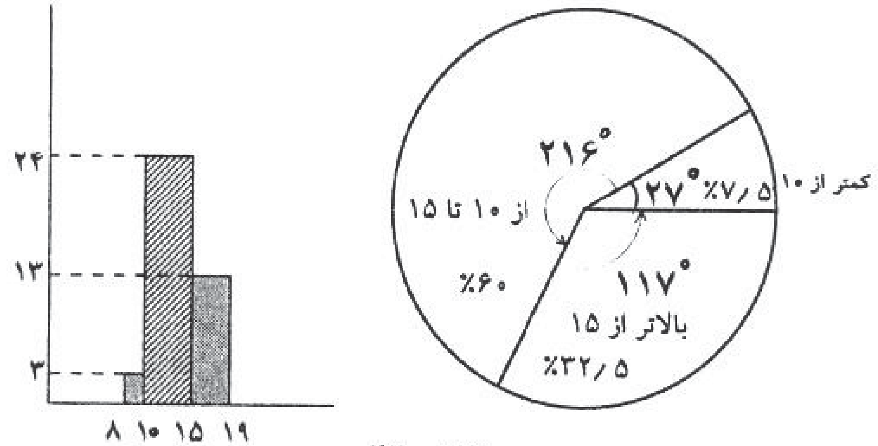
جدول ۱

اگر دبیرستان تصمیم گرفته باشد، برای دانش‌آموزان، سه نوع کلاس در تابستان تشکیل دهد: ۱) آن‌ها که معدل کمتر از ۱۰ دارند تا یک بار دیگر درس‌ها را مرور کنند و بتوانند در پایان تابستان، یک بار دیگر در امتحان‌ها شرکت کنند؛ ۲) آن‌ها که معدلی از ۱۰ تا ۱۵ دارند تا درس‌ها را بهتر فرا گیرند؛ ۳) آن‌ها که معدلی بالاتر از ۱۵ دارند، برای فراگیری بیشتر و آشنایی با تاریخ و کاربردهای ریاضی. در این صورت، جدول ۲ و شکل ۴۱ به‌دست می‌آید:

فراوانی	معدل نمره‌ها
۳	از ۸ تا کمتر از ۱۰
۲۴	از ۱۰ تا ۱۵
۱۳	بالاتر از ۱۵

جدول ۲

می‌توانستیم جدول پراکندگی را در رده‌های به فاصلهٔ ۲ (از ۸ تا کمتر از



شکل ۴۱

۱۰؛ از ۱۰ تا کمتر از ۱۲؛ ...؛ از ۱۸ تا ۲۰) تنظیم و نمودارهای آن را رسم کنیم (خودتان انجام دهید).

برای محاسبهٔ انحراف معیار (واریانس) باید حاصل عبارت

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{۴۰}(x_i - \overline{x})^۲}{۴۰}}$$

را به‌دست آورد که، در آن، $\overline{x} = ۱۳/۸۴۵$ میانگین معدل‌ها است. برای این محاسبه، باید از ماشین حساب استفاده کرد که، در این صورت، به دشواری خاصی برنمی‌خوریم.

۴۸. باتوجه به اتحاد $\log_B A = \frac{۱}{\log_A B}$ داریم:

$$\sum_{n=۲}^{۱۳۷۵}\left(\frac{۱}{\log_n ۱۳۷۵!}\right) = \frac{۱}{\log_۲ ۱۳۷۵!} +$$

$$+\frac{۱}{\log_۳ ۱۳۷۵!} + \ldots + \frac{۱}{\log_{۱۳۷۵} ۱۳۷۵!} =$$

$$= \log_{۱۳۷۵!} ۲ + \log_{۱۳۷۵!} ۳ + \ldots + \log_{۱۳۷۵!} ۱۳۷۵ =$$

$$= \log_{۱۳۷۵!}(۲ \times ۳ \times \ldots \times ۱۳۷۵) = \log_{۱۳۷۵!} ۱۳۷۵! = ۱$$

۴۹. ۱) داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+$$

$$+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}-2\right)+\ldots+\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}-2\right)$$

$$=(x^2+x^4+\ldots+x^{2n})+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n=$$

$$=\frac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1}+\frac{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{2n}}-1\right)}{\frac{1}{x^2}-1}-2n=$$

$$=\frac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1}+\frac{(x^{2n}-1)}{x^{2n}(x^2-1)}-2n=$$

$$=\frac{(x^{2n}-1)(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(x^2-1)}-2n$$

و به‌همین ترتیب، برای مجموع دوم به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)^2=\frac{(x^{2n}-1)(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(x^2-1)}+2n$$

۵۰. احتمال برد A را a، احتمال برد B را b و احتمال برد C را c می‌گیریم.

از آن‌جا که به هر حال، یکی از سه نفر برنده می‌شود، باید داشته باشیم:

$$a + b + c = ۱ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، بنابه فرض مساله داریم:

$$a = ۳b,\ c = ۲b \qquad (۲)$$

با استفاده از برابری‌های (۲)، برابری (۱) چنین می‌شود:

$$۳b + b + ۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۶}$$

و درنتیجه $a = \frac{۱}{۲}$ و $c = \frac{۱}{۳}$.

۵۱. تعداد حالت‌های ممکن برابر ۶ و تعداد حالت‌های مُساعد برابر ۳ است. پس احتمال آمدن یک عدد فرد برابر است با $\frac{۳}{۶}$ یا $\frac{۱}{۲}$.

۵۲. برای مکعب اول، ممکن است هریک از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، یا ۶ بیاید؛ همین‌طور برای مکعب دوم. برای مکعب اول ۶ حالت وجود دارد و، هریک از ۶ حالت آن، می‌تواند با هریک از ۶ حالت مکعب دوم در کنار هم قرار گیرد. بنابراین، وقتی دو مکعب را با هم بیندازیم، روی هم ۳۶ حالت ممکن وجود دارد.

مجموع عددهای دو مکعب، یکی از ۱۱ حالت زیر می‌تواند باشد:

$$۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲$$

اگر عدد مربوط به مکعب اول را x و عدد مربوط به مکعب دوم را y فرض کنیم ($۱ \leq x \leq ۶$ و $۱ \leq y \leq ۶$)، روشن است که معادلهٔ $x + y = ۲$، تنها یک جواب دارد: $x = ۱$ و $y = ۱$. همچنین معادلهٔ $x + y = ۱۲$ هم، بیش از یک جواب ندارد: $x = ۶$ و $y = ۶$. معادله‌های $x + y = ۳$ و $x + y = ۱۱$، هرکدام دو جواب دارند،

$$x + y = ۳ \Rightarrow x = ۱,\ y = ۲ \text{ یا } x = ۲,\ y = ۱;$$

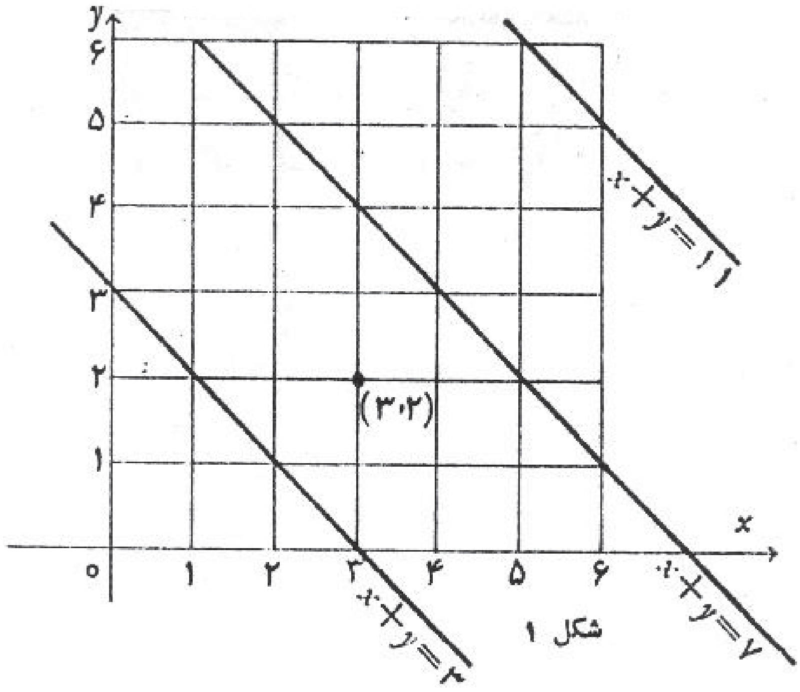
$$x + y = ۱۱ \Rightarrow x = ۵,\ y = ۶ \text{ یا } x = ۶,\ y = ۵$$

به همین ترتیب می‌توان، تعداد جواب‌ها را، برای حالت‌های دیگر مجموع به‌دست آورد. در[1] جدول زیر، تعداد جواب‌های ممکن را، برای همهٔ حالت‌های مجموع آورده‌ایم:

مجموع ۲:	۱، ۱
مجموع ۳:	۲، ۱ ۱، ۲
مجموع ۴:	۳، ۱ ۲، ۲ ۱، ۳
مجموع ۵:	۴، ۱ ۳، ۲ ۲، ۳ ۱، ۴
مجموع ۶:	۵، ۱ ۴، ۲ ۳، ۳ ۲، ۴ ۱، ۵
مجموع ۷:	۶، ۱ ۵، ۲ ۴، ۳ ۳، ۴ ۲، ۵ ۱، ۶
مجموع ۸:	۶، ۲ ۵، ۳ ۴، ۴ ۳، ۵ ۲، ۶
مجموع ۹:	۶، ۳ ۵، ۴ ۴، ۵ ۳، ۶
مجموع ۱۰:	۶، ۴ ۵، ۵ ۴، ۶
مجموع ۱۱:	۶، ۵ ۵، ۶
مجموع ۱۲:	۶، ۶

در این جدول دیده می‌شود، برای معادلهٔ $x + y = ۷$ (باتوجه به‌فرض $۶ \leq x \leq ۱$ و $۶ \leq y \leq ۱$)، شش جواب به‌دست می‌آید و، نسبت به همهٔ معادله‌های دیگر، جواب‌های بیشتری دارد. بنابراین شانس آمدن مجموع ۷، از هر مجموع دیگری بیشتر است $\left(\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}\right)$ و شانس آمدن مجموع ۲ یا مجموع ۱۲، از همه کمتر است. (هرکدام برابر $\frac{۱}{۳۶}$).

مضمون جدول را روی شکل هم می‌توان نشان داد. دستگاه محورهای مختصات قائم را در نظر می‌گیریم.روی محور ox عدد مربوط به مکعب اول و روی oy، عدد مربوط به مکعب دوم را نشان می‌دهیم و شبکه‌ای مربعی به‌وجود می‌آوریم (شکل ۴۲). در این شبکه، نقطهٔ برخورد هر دو خط راست (به‌جز نقطه‌های واقع بر محورها)، معرف یکی از مجموع‌ها است. مثلاً نقطهٔ به مختصات $(۳, ۲)$، به‌معنای آن است که عدد مکعب اول برابر ۳ و عدد مکعب دوم برابر ۲ است و، بنابراین،



شکل ۴۲

مجموعی برابر ۵ دارند. از برخورد هریک از خط‌های راست

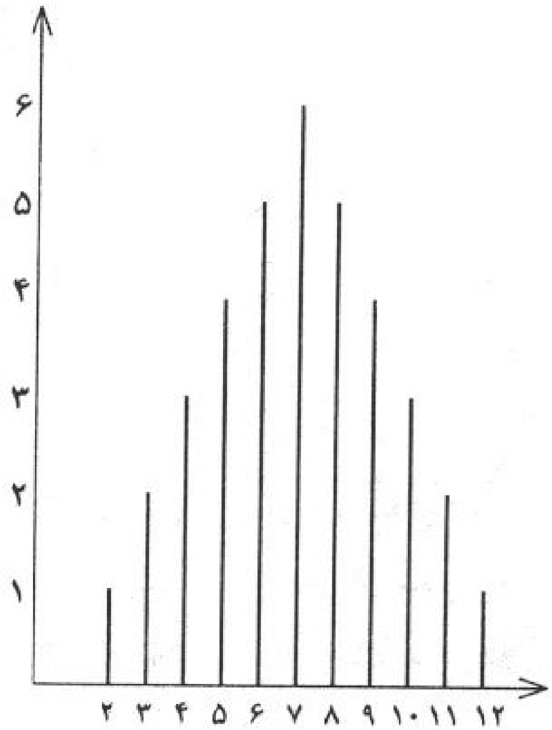
$$x+y=۲,\ x+y=۳,\ \ldots,\ x+y=۱۲$$

با این شبکه، تعداد جواب‌های معادله به‌دست می‌آید (در شکل، خط‌های راست $x+y=۳$، $x+y=۷$ و $x+y=۱۱$ رسم شده‌اند). روی شکل دیده می‌شود، تعداد نقطه‌های برخورد خط راست $x+y=۷$ با شبکه، بیشتر از دیگران و تعداد نقطه‌های برخورد هریک از دو خط راست $x+y=۲$ و $x+y=۱۲$ با شبکه، کمتر از دیگران است. در شکل ۴۳ جدول پراکندگی و نمودار میله‌ای مجموع عددهای دو مکعب داده شده است.

یادداشت. همین مساله را می‌توان برای حالتی حل کرد که سه مکعب بازی را با هم به هوا پرتاب کنیم تا به زمین بنشینند و بخواهیم پراکندگی مجموع عددهای آن‌ها را بررسی کنیم. روش حل، با حالت دو مکعب تفاوتی ندارد، تنها در این‌جا، وضع اندکی بغرنج‌تر است. وقتی سه مکعب بازی را باهم به هوا پرتاب کنیم، $۶^۳$،

یعنی ۲۱۶ حالت مختلف پیش می‌آید. البته اگر بخواهیم همهٔ حالت‌های ممکن را فهرست کنیم، باید حوصله داشته باشیم. در این‌جا هم، اگر عدد مکعب اول را x، عدد مکعب دوم را y و عدد مکعب سوم را z بگیریم، باید با شرط $۱ \leq x \leq ۶$، $۱ \leq y \leq ۶$ و $۱ \leq z \leq ۶$، معادلهٔ $x + y + z = a$ را در حالت‌های از $a = ۳$ تا $a = ۱۸$ حل کنیم. تلاش کنید، به‌عنوان تمرین، خودتان این معادله را حل کنید. در حالت سه مکعب بازی، بیشترین احتمال برای وقتی است که مجموع عددها برابر ۱۰ یا ۱۱ باشد.

مجموع	فراوانی	احتمال پیش‌آمد
۲	۱	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	۲	$\frac{۱}{۱۸}$
۴	۳	$\frac{۱}{۱۲}$
۵	۴	$\frac{۱}{۹}$
۶	۵	$\frac{۵}{۳۶}$
۷	۶	$\frac{۱}{۶}$
۸	۵	$\frac{۵}{۳۶}$
۹	۴	$\frac{۱}{۹}$
۱۰	۳	$\frac{۱}{۱۲}$
۱۱	۲	$\frac{۱}{۱۸}$
۱۲	۱	$\frac{۱}{۳۶}$



شکل ۴۳: جدول پراکندگی و نمودار میله‌ای مجموع عددهای دو مکعب بازی

به‌طور کلی، ثابت می‌کنند که، با پرتاب n مکعب بازی، برای عددهای آن‌ها، احتمال پیش‌آمد مجموعی از همه بیشتر است که به $\frac{۷n}{۲}$ نزدیکتر باشد. مثلاً در

حالت $n = ۴$، احتمال بیشتر متعلق به مجموع ۱۴ و در حالت $n = ۵$، احتمال بیشتر متعلق به مجموع‌های ۱۷ و ۱۸ است.

۵۳. دو عددی که مجموعی برابر ۵ و حاصل‌ضربی برابر ۴ دارند، عبارتند از ۱ و ۴. بنابراین باید عدد یکی از مکعب‌ها برابر ۱ و عدد دیگری برابر ۴ باشد (دو حالت: اولی ۱، و دومی ۴ یا اولی ۴ و دومی ۱). در انداختن دو مکعب بازی هم، ۳۶ حالت ممکن وجود دارد که، از بین آن‌ها، ۲ حالت مناسب است.

پاسخ. با احتمال $\frac{۱}{۱۸}$.

۵۴. دایرهٔ به شعاع برابر ۱، مساحتی برابر π واحد مربع دارد. مربع محاط در این دایره، قطری برابر قطر دایره (یعنی برابر ۲) و ضلعی به طول $\sqrt{۲}$ و، بنابراین، مساحتی برابر ۲ واحد مربع دارد. به این ترتیب، بخشی از سطح دایره که در بیرون مربع محاطی قرار دارد، برابر $(\pi - ۲)$ واحد مربع و نسبت مساحت این بخش دایره، به مساحت تمامی دایره، برابر $\frac{\pi - ۲}{\pi}$ می‌شود. بنابراین، اگر نقطه‌ای به تصادف بر سطح دایره انتخاب کنیم، با احتمالی برابر $\frac{\pi - ۲}{\pi}$، یعنی به تقریب ۳۶٫۵ درصد، در درون مربع قرار نمی‌گیرد.

وقتی بعد از نقطهٔ اول، نقطهٔ دوم را، به تصادف از سطح دایره انتخاب کنیم، احتمال این‌که باز هم در بیرون سطح مربع باشد، برابر است با ۳۶٫۵درصد از ۳۶٫۵درصد قبلی، یعنی اندکی بیش از ۱۳درصد.

۵۵. احتمال این‌که، در نخستین انتخاب تصادفی، حرف «چ» از بین ۵ حرف بیرون بیاید، برابر است با $\frac{۱}{۵}$. احتمال این‌که، از بین ۴ حرف باقی‌مانده، در انتخاب تصادفی، حرف «ی» بیرون بیاید، برابر است با $\frac{۱}{۴}$. به این ترتیب، برای این‌که در نخستین انتخاب حرف «چ» و در دومین انتخاب حرف «ی» بیاید، احتمالی برابر $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵}$، یعنی $\frac{۱}{۲۰}$ وجود دارد. به‌همین ترتیب، در انتخاب تصادفی حرف سوم، با احتمال $\frac{۱}{۳}$ حرف «س» و در انتخاب تصادفی چهارم با احتمال $\frac{۱}{۲}$ حرف «ت» ظاهر

می‌شود. اگر این چهار حرف انتخاب شده باشند، انتخاب تصادفی پنجم، انتخابی قطعی و با احتمال برابر ۱ است. بنابراین، احتمال این‌که، با انتخاب‌های تصادفی، واژهٔ «چیستا» درست شود، برابر است با

$$\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۱۲۰}$$

این احتمال را، می‌توانستیم با روش دیگری به‌دست آوریم. ببینیم چند حالت ممکن برای انتخاب‌های تصادفی وجود دارد! در انتخاب اول، ۵ حالت (ممکن است هریک از ۵ حرف انتخاب شود). در انتخاب تصادفی دوم، ۴ حالت وجود دارد. هریک از ۵ حالت انتخاب اول می‌تواند با هریک از انتخاب‌های حالت دوم، یعنی روی‌هم به تعداد ۴ × ۵، یا ۲۰ حالت انجام گیرد. اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، روی هم به تعداد

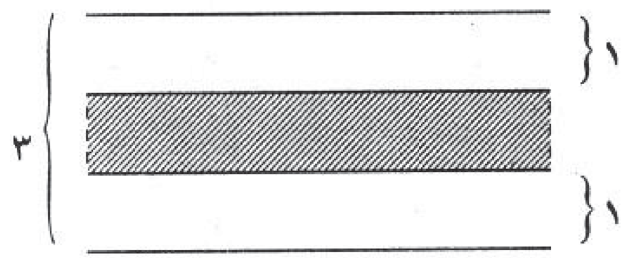
$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

حالتِ ممکن، برای انتخاب تصادفی ۵ حرف، وجود دارد. از میان این ۱۲۰ حالتِ ممکن، تنها یک حالت، انتخاب مناسب است و، بنابراین، احتمال پیش آمدن آن برابر است با $\frac{۱}{۱۲۰}$.

احتمال این‌که این پیش‌آمد، رُخ دهد، خیلی کم است و درواقع «محتمل» نیست. بنابراین، اگر ضمن آزمایش، به واژهٔ «چیستا» برسیم، باید شگفت‌زده شویم.

با وجود این، احتمال $\frac{۱}{۱۲۰}$، به ما تلقین می‌کند که، اگر بارها و بارها، آزمایش را تکرار کنیم، باید به تقریب، در هر ۱۲۰ آزمایش، یک بار پیش‌آمد درست شدن واژهٔ «چیستا» رخ دهد.

۵۶. $y = c$ خط راستی موازی محور $x'x$ است؛ خط‌های راست $x+y = a$ و $\sqrt{3}x-y = b$، با محور $x'x$ مثلثی می‌سازند که زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آن (روی محور $x'x$)، به‌ترتیب برابر ۴۵ درجه و ۶۰ درجه است (چرا؟). پس این دو خط راست، با خط راست $y = c$ هم، مثلثی را به وجود می‌آورند که زاویه‌های



شکل ۴۴

مجاور به قاعدهٔ آن (روی خط راست $y = c$) برابر ۴۵ درجه و ۶۰ درجه است. با این خطهای راست، نمی‌توان مثلثی متساوی‌الاضلاع ساخت (زیرا ۴۵ درجه و ۶۰ درجه، مقدارهای ثابت‌اند و نمی‌توانند با هم برابر شوند). احتمال این‌که، با این سه خط راست، مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست آید، برابر صفر است.

۵۷. روشن است، قطعهٔ سالمی که انتخاب کرده‌ایم، نمی‌تواند قطعهٔ گم شده باشد. قطعهٔ گم شده، بین ۳۰ قطعهٔ دیگر است. درضمن، بین این ۳۰ قطعه، ۲۰ قطعهٔ سالم وجود دارد و احتمال این‌که قطعهٔ گُم شده سالم باشد، برابر است با $p = \frac{۲۰}{۳۰} = \frac{۲}{۳}$؛ و احتمال این‌که قطعهٔ گُم شده ناسالم باشد، برابر است با $\frac{۲}{۳} - ۱$ یعنی $\frac{۱}{۳}$.

۵۸. اگر بین دو خط راست موازی، نواری به عرض ۱ سانتی‌متر و به فاصله‌های برابر از آن‌ها رسم کنیم (شکل ۴۴)، برای این‌که سکه هیچ‌کدام از دو خط راست موازی را قطع نکند، باید طوری قرار گیرد که مرکز آن در داخل این نوار (که روی شکل هاشور خورده است) باشد. عرض نوار برابر ۱ سانتی‌متر و فاصلهٔ بین دو خط راست موازی، برابر ۳ سانتی‌متر است. بنابراین، احتمال این‌که سکهٔ ما، خطهای راست موازی را قطع نکند، برابر است با $\frac{۱}{۳}$.

۵۹. در آغاز ببینیم، از بین ۱۰ گلوله، به چند طریق می‌توان دو گلوله انتخاب کرد؟ اگر گلوله‌ها را از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری کنیم، در انتخاب گلولهٔ اول، ۱۰ حالت مختلف پیش می‌آید (ممکن است گلولهٔ اول یا گلولهٔ دوم، . . .، یا گلولهٔ دهم

انتخاب شود). بعد از انتخاب گلولهٔ اول، ۹ حالت برای انتخاب گلوله دوم وجود دارد. به‌نظر می‌رسد، برای انتخاب تصادفی دو گلوله، ۹۰ حالت ممکن وجود دارد. ولی با اندکی دقت روشن می‌شود که، در این ۹۰ حالتِ ممکن، هر حالت دو بار به حساب آمده است. مثلاً اگر در انتخاب تصادفی اول، گلولهٔ شمارهٔ ۵ و، در انتخاب تصادفی دوم، گلولهٔ شمارهٔ ۸ به تصادف انتخاب شده باشد، مثل این است که در انتخاب اول شمارهٔ ۸ و در انتخاب دوم شماره ۵ انتخاب شود. بنابراین، برای انتخاب دو گلوله از بین ۱۰ گلوله، به تعداد $\frac{۹۰}{۲}$، یعنی ۴۵ حالتِ ممکن وجود دارد.

انتخابِ مناسب، برای وقتی که بخواهیم هر دو گلوله قرمز باشد، این است که از بین سه گلوله قرمز دو گلوله انتخاب کنیم که به ۳ طریق ممکن است (چرا؟). بنابراین، احتمال این‌که هر دو گلوله قرمز باشند، برابر است با $\frac{۳}{۴۵}$ یعنی $\frac{۱}{۱۵}$.

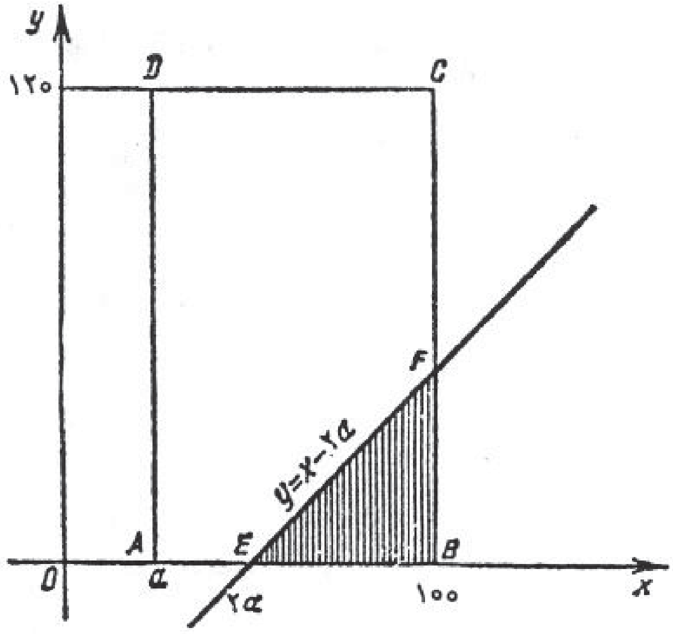
به‌همین ترتیب، از بین ۴۵ حالتِ ممکن، ۲۱ حالت مناسب (برای این‌که هر دو گلوله سیاه باشند) وجود دارد (خودتان محاسبه کنید: از بین ۷ گلولهٔ سیاه، به ۲۱ طریق می‌توان ۲ گلوله انتخاب کرد). بنابراین، احتمال این‌که هر دو گلوله سیاه باشند، برابر است با $\frac{۲۱}{۴۵}$ یا $\frac{۷}{۱۵}$.

پاسخ. احتمال این‌که هر دو گلوله قرمز باشند برابر $\frac{۱}{۱۵}$ یا ۶/۷ درصد؛ احتمال این‌که هر دو گلوله سیاه باشند، برابر $\frac{۷}{۱۵}$ یا ۴۶/۷ درصد.

۶۰. سرعت‌های تصادفی اتومبیل‌های A و B را به‌ترتیب x و y می‌گیریم. بنابر شرط‌های مساله، باید داشته باشیم:

$$a < x \leq ۱۰۰ \text{ و } ۰ < y \leq ۱۲۰$$

اگر سرعت A را روی محور $x'x$ و سرعت B را روی محور $y'y$ نشان دهیم (شکل ۴۵)، مجموعهٔ همهٔ پیش‌آمدهای ممکن، سطح مستطیل $ABCD$ را،



شکل ۴۵

با بُعدهای $a - ۱۰۰$ و ۱۲۰ می‌پوشانند. مساحت این مستطیل برابر است با

$$۱۲۰(۱۰۰ - a)$$

کامیون سرعتی برابر a دارد. اتومبیل A با سرعت x به دنبال کامیون می‌رود، یعنی با سرعت $(x - a)$ کیلومتر در ساعت به کامیون نزدیک می‌شود. B با سرعت y به استقبال کامیون می‌رود، بنابراین با سرعت $(y + a)$ کیلومتر در ساعت به کامیون نزدیک می‌شود. برای این‌که اتومبیل A، پیش از B به کامیون برسد، باید داشته باشیم:

$$x - a > y + a \Rightarrow y < x - ۲a$$

در دستگاه محورهای مختصات، اگر خط راست $y = x - ۲a$ را رسم کنیم، نقطه‌های زیر این خط راست (که عرضی کوچکتر از عرض نقطه‌های واقع بر خط راست $y = x - ۲a$ دارند)، معرف نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات هستند که، در آن‌ها، مقدار y از مقدار $x - ۲a$ کوچکتر است. این خط راست

را در همان دستگاه محورهای مختصات قبلی رسم می‌کنیم (شکل ۴۵) بخشی از صفحهٔ محورهای مختصات که در زیر خط راست $y = x - ۲a$ و، درضمن، در محدودهٔ پیش‌آمدهای ممکن باشد، سطح مثلث EBF را تشکیل می‌دهد (که در شکل هاشور خورده است). **مجموعهٔ پیش‌آمدهای مساعد**، شامل نقطه‌های درون همین مثلث است که مساحتی برابر

$$\frac{۱}{۲}(۱۰۰ - ۲a)^۲$$

دارد (چرا؟). احتمال این‌که اتومبیل A، پیش از B به کامیون برسد، برابر است با نسبت مجموعهٔ پیش‌آمدهای مساعد به مجموعهٔ پیش‌آمدهای ممکن، یعنی نسبت مساحت مثلث EBF به مساحت مستطیل $ABCD$:

$$p = \frac{\frac{۱}{۲}(۱۰۰ - ۲a)^۲}{۱۲۰(۱۰۰ - a)} = \frac{۱}{۲۴۰} \cdot \frac{(۱۰۰ - ۲a)^۲}{۱۰۰ - a}$$

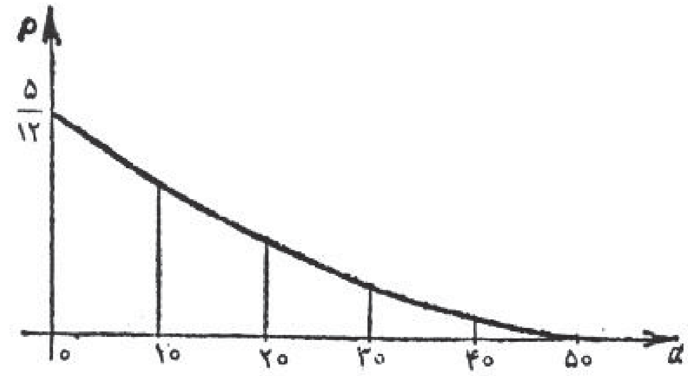
یادداشت. جالب است، به یاری احتمالی که پیدا کردیم، بستگی احتمال p را با a (یعنی سرعت کامیون) بررسی کنیم. این بستگی را، برای برخی مقدارهای a، در یک جدول نشان می‌دهیم:

سرعت کامیون (a)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
p	$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۸}{۲۷}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۱}{۳۶}$	۰

بر اساس همین جدول، نمودار شکل ۴۶ به‌دست می‌آید.

معلوم می‌شود، به‌ازای $a = ۵۰$ (یعنی وقتی سرعت کامیون ۵۰ کیلومتر در ساعت باشد)، اتومبیل A، حتا اگر با حداکثر سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت حرکت کند، نمی‌تواند قبل از B به کامیون برسد، ولو این‌که اتومبیل B در جای خود ایستاده باشد.

به‌طور کلی، در حالتی که سرعت کامیون، بیشتر از نصف حداکثر سرعت اتومبیل A باشد و دو اتومبیل A و B در دو طرف کامیون و به یک فاصله از آن



شکل ۴۶

باشند، به همین نتیجه می‌رسیم. مثلاً فرض کنید اتومبیل‌های A و B، در دو طرف کامیون و به‌فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری آن باشند. سرعت کامیون را ۶۰ کیلومتر در ساعت و سرعت A را ۱۰۰ کیلومتر در ساعت (حداکثر سرعتی که A می‌تواند داشته باشد) می‌گیریم و فرض می‌کنیم اتومبیل B در جای خود ایستاده باشد (حداقل سرعت ممکن، یعنی ۰ کیلومتر در ساعت). اگر بعد از t ساعت، اتومبیل A به کامیون برسد، در این مدت $۱۰۰t$ کیلومتر را طی کرده است. در همین مدت، کامیون $۶۰t$ کیلومتر جلو رفته است و چون ۱۰ کیلومتر از A جلو بود، باید داشته باشیم:

$$۱۰۰t = ۶۰t + ۱۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۴}$$

بعد از $\frac{۱}{۴}$ ساعت (۱۵ دقیقه)، A به کامیون می‌رسد. ولی پیش از رسیدن A به کامیون، کامیون از کنار B رد شده است، زیرا کامیون در $\frac{۱}{۴}$ ساعت، ۱۵ کیلومتر جلو رفته است، در حالی که B، در ۱۰ کیلومتری او بوده است.

۶۱. ساده‌ترین راه‌حل مساله این است که حالت‌های عکس را در نظر بگیریم.

چه احتمالی وجود دارد که، در پرتاب چهار مکعب بازی با هم، هیچ‌کدام عدد ۱ را نشان ندهند. این احتمال، وقتی یک مکعب را می‌اندازیم، برابر $۱ - \frac{۱}{۶}$ یعنی

$\frac{۵}{۶}$ است و، بنابراین، وقتی ۴ مکعب را با هم بیندازیم، این احتمال برابر است با

$$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴} \approx ۰/۴۸۲۲۵۳$$

احتمال آمدن دو عدد ۱، وقتی دو مکعب را می‌اندازیم برابر $\frac{۱}{۳۶}$ و بنابراین احتمال نیامدن دو عدد ۱، برابر $۱ - \frac{۱}{۳۶}$ یعنی $\frac{۳۵}{۳۶}$ است. پس احتمال نیامدن دو عدد ۱، در ۲۴ پرتاب دو مکعب، برابر است با

$$\left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^{۲۴} \approx ۰/۵۰۸۵۹۶$$

(در محاسبهٔ $\left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^{۲۴}$ و حتا $\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}$، بهتر است از ماشین حساب استفاده شود).

برای پیدا کردن احتمال‌های مورد نظر مساله، باید تفاوت این دو عدد را از ۱ محاسبه کنیم:

احتمال آمدن دست‌کم یک عدد ۱ در پرتاب ۴ مکعب $= ۱ - ۰/۴۸۲۲۵۳ =$

$$= ۰/۵۱۷۷۴۷;$$

احتمال آمدن دو عدد ۱، در ۲۴ بار پرتاب ۲ مکعب $= ۱ - ۰/۵۰۸۵۹۶ =$

$$= ۰/۴۹۱۴۰۴$$

احتمال آمدن یک عدد ۱، در پرتاب ۴ مکعب با هم، بیش از ۵۱درصد و احتمال آمدن دو عدد ۱، در ۲۴ بار پرتاب دو مکعب، کمتر از ۵۰ درصد است.

استدلال شوالیه دومره‌نادرست است و احتمال این دو پیش‌آمد، یکی نیست.

نابرابری کوشی ـ نامعادله ـ تعیین علامت چندجمله‌ای

۶۲. بنا به نابرابری کوشی، برای سه عدد مثبت $\frac{a}{b}$، $\frac{b}{c}$ و $\frac{c}{a}$ داریم:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{۳} \geq \sqrt[۳]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq ۳$$

۶۳. بازوهای شاهین ترازو را x و y می‌گیریم ($x \neq y$). کالایی را در نظر می‌گیریم که وزن واقعی آن برابر $۲a$ کیلوگرم باشد. در کفهٔ مجاور بازوی به طول x، نصف کالا (یعنی a کیلوگرم) را می‌گذاریم. فرض کنید، برای تعادل ترازو لازم باشد در کفهٔ دیگر وزنهٔ $a_۱$ کیلوگرم را قرار دهیم. باید داشته باشیم:

$$a \times x = a_۱ \times y \Rightarrow a_۱ = a\frac{x}{y} \qquad (۱)$$

اکنون نصف دیگر کالا را در کفهٔ دوم قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم، برای تعادل ترازو، در کفهٔ دیگر $a_۲$ کیلوگرم گذاشته باشیم:

$$a \times y = a_۲ \times x \Rightarrow a_۲ = a\frac{y}{x} \qquad (۲)$$

آیا $۲a = a_۱ + a_۲$؟ اگر برابری (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a_۱ + a_۲ = a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

ولی باتوجه به مثبت بودن مقدارهای x و y، اگر نابرابری میانگین‌ها را، برای دو عدد $\frac{x}{y}$ و $\frac{y}{x}$ بنویسیم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} > ۲\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = ۲ \; (x \neq y)$$

یعنی $۲a < a_۱ + a_۲$. وزن واقعی کالا، از $a_۱ + a_۲$ کمتر است.

۶۴. باتوجه به نابرابری کوشی، برای دو عدد مثبت، داریم:

$$x+1\geq 2\sqrt{x};\ y+1\geq 2\sqrt{y};\ z+1\geq 2\sqrt{z}$$

از ضرب این سه نابرابری در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$(x+1)(y+1)(z+1)\geq 8\sqrt{xyz}=8$$

علامت برابری وقتی به‌دست می‌آید که هر سه عدد x و y و z برابر ۱ باشند.

یادداشت. این نابرابری را می‌توان در حالت کلی ثابت کرد:

اگر a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت باشند، و $a_1a_2\ldots a_n=1$، خواهیم داشت:

$$(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)\geq 2^n$$

اثبات، شبیه اثبات نابرابری مساله ۶۴ است.

۶۵. بنابه نابرابری میانگین برای دو عدد مثبت داریم:

$$\sqrt{a_1a_2}\leq\frac{a_1+a_2}{2},\ \sqrt{a_1a_3}\leq\frac{a_1+a_3}{2},\ \sqrt{a_2a_3}\leq\frac{a_2+a_3}{2}$$

اگر این سه نابرابری را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\sqrt{a_2a_3}\leq a_1+a_2+a_3=k$$

علامت برابری، برای $a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}k$ برقرار است.

۶۶. درستی این سه نابرابری روشن است:

$$a^2\geq a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a+c-b)$$

$$b^2\geq b^2-(c-a)^2=(b+c-a)(a+b-c)$$

$$c^2\geq c^2-(a-b)^2=(a+c-b)(b+c-a)$$

از ضرب این سه نابرابری در یکدیگر به‌دست می‌آید:

$$a^{۲}b^{۲}c^{۲} \geq (a+b-c)^{۲}(b+c-a)^{۲}(c+a-b)^{۲}$$

که از آن‌جا نابرابری مورد نظر به‌دست می‌آید:

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

a و b و c طول‌های ضلع‌های مثلث‌اند و، بنابراین، مقدارهای درون پرانتزهای سمت راست نابرابری، مثبت‌اند. به همین دلیل، بعد از جذر گرفتن، علامت قدرمطلق نگذاشتیم. درضمن، علامت برابری، برای مثلثی است که سه ضلع برابر داشته باشد.

۶۷. اگر به‌صورت و مخرج کسری که از واحد کوچکتر است، یک واحد اضافه کنیم، مقدار کسر بزرگتر می‌شود؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳}$$
$$\frac{۳}{۴} < \frac{۴}{۵}$$
$$\frac{۵}{۶} < \frac{۶}{۷}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{۹۹}{۱۰۰} < \frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

این نابرابری‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \ldots \times \frac{۹۹}{۱۰۰} <$$
$$< \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۶}{۷} \times \ldots \times \frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

مقدار سمت چپ این نابرابری را x می‌نامیم و مقدار سمت راست نابرابری را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۶}{۷} \times \ldots \times \frac{۱۰۰}{۱۰۱} =$$

$$= \frac{۱}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \ldots \times \frac{۹۹}{۱۰۰} \times ۱۰۱} = \frac{۱}{۱۰۱x}$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$x < \frac{۱}{۱۰۱x} \Rightarrow x^{۲} < \frac{۱}{۱۰۱} \Rightarrow x < \frac{۱}{\sqrt{۱۰۱}} < \frac{۱}{۱۰}$$

۶۸. شش عدد مثبت $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ را در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶}{۶} \geq \sqrt[۶]{a_۱ a_۲ a_۳ a_۴ a_۵ a_۶}$$

برای عبارت سمت چپ نابرابری، باتوجه به نابرابری کوشی برای $n = ۲$ و $n = ۳$، داریم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶}{۶} = \frac{\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳}{۳} + \frac{a_۴ + a_۵ + a_۶}{۳}}{۲} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳}{۳} \cdot \frac{a_۴ + a_۵ + a_۶}{۳}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[۳]{a_۱ a_۲ a_۳} \cdot \sqrt[۳]{a_۴ a_۵ a_۶}} = \sqrt[۶]{a_۱ a_۲ a_۳ a_۴ a_۵ a_۶}$$

نابرابری کوشی، برای شش عدد مثبت ثابت شد. اکنون پنج عدد مثبت $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ و $a_۵$ را درنظر می‌گیریم و میانگین حسابی آن‌ها را S می‌نامیم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵}{۵} = S$$

باید ثابت کنیم: $S \geq \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

نابرابری کوشی را، برای ۶ عدد a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 و S می‌نویسیم:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + S}{6} \geq \sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4a_5S}$$

اگر به‌جای $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$، مقدارش $5S$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$S \geq \sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4a_5S} \Rightarrow S^6 \geq a_1a_2a_3a_4a_5S$$

از آنجا $S^5 \geq a_1a_2a_3a_4a_5$ و $S \geq \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$. و این، همان نابرابری کوشی برای پنج عدد مثبت است.

با همین روش می‌توانید، نابرابری کوشی را، اول برای $n = 8$ و، سپس به‌یاری آن، برای $n = 7$ ثابت کنید.

۶۹. دیدیم، برای دو عدد مثبت a و b، مقدار $\frac{a+b}{2}$ را میانگین حسابی و $\sqrt{ab}$ را میانگین هندسی گویند و ثابت کردیم، برای دو عدد مثبت (و به‌طور کلی، برای n مقدار مثبت)، میانگین حسابی از میانگین هندسی کوچکتر نیست.

در ریاضیات، با دو نوع میانگین دیگر هم کار می‌کنند: **میانگین مربعی و میانگین توافقی**. میانگین مربعیِ دو عدد مثبت a و b، برابر است با $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ و میانگین توافقی این دو عدد برابر است با $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

نابرابری‌های مساله، اثبات این مطلب را می‌خواهد که: برای دو عدد مثبت a و b، میانگین مربعی از میانگین حسابی، میانگین حسابی از میانگین هندسی و میانگین هندسی از میانگین توافقی کمتر نیست. برای حل مساله، تنها باید درستی دو نابرابری

را ثابت کنیم:

$$1)\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}, \quad 2)\ \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

که به سادگی به نتیجه می‌رسند. برای نابرابری اول داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

که درستی آن روشن است. تنها در حالت $a=b$، میانگین مربعی با میانگین حسابی برابر می‌شود. برای نابرابری دوم:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

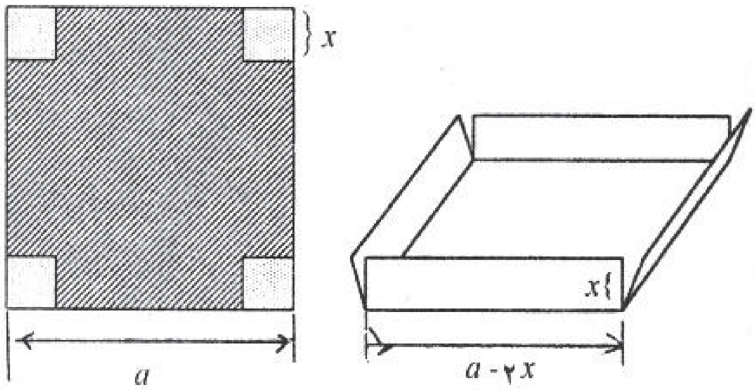
که به نابرابری روشن $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ منجر می‌شود.

میانگین‌های مربعی و توافقی را هم، می‌توان برای n عدد مثبت نوشت. از میانگین مربعی، در فصل اول کتاب، بخش آمار ریاضی، برای محاسبهٔ انحراف معیار استفاده کرده بودیم.

۷۰. دو ضلع مجاور مستطیل را، با طول‌های a و b فرض می‌کنیم:

$$a+b=p$$

مجموع دو عدد مثبت a و b، مقداری ثابت و برابر p است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها (یعنی مساحت مستطیل)، وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که، این دو عدد،



شکل ۴۷

با هم برابر باشند، یعنی وقتی که با مربعی به محیط برابر $۲p$ (ضلعی برابر $\frac{۱}{۲}p$) سروکار داشته باشیم.

۷۱. به شکل ۴۷ توجه کنید. اگر حجم جعبهٔ مکعب مستطیلی را y فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$y = x(a - ۲x)^۲$$

که می‌توان آن را این‌طور نوشت

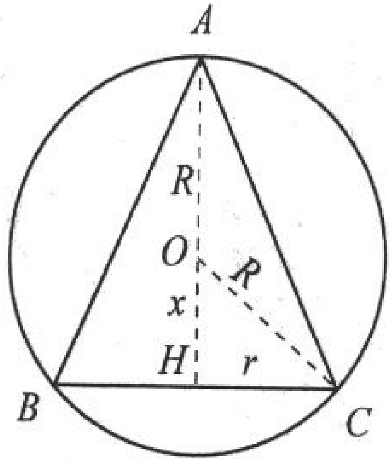
$$y = \frac{۱}{۴}[۴x(a - ۲x)(a - ۲x)]$$

در داخل کروشه، سه مقدار مثبت ($۴x$، $a - ۲x$ و $a - ۲x$) در هم ضرب شده‌اند که مجموعی ثابت دارند:

$$۴x + (a - ۲x) + (a - ۲x) = ۲a$$

بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که، این سه مقدار، با هم برابر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$۴x = a - ۲x \Rightarrow x = \frac{a}{۶}$$



شکل ۴۸

از هر گوشهٔ ورقهٔ مربعی آهن سفید، باید مربعی با ضلع به طول $\frac{a}{۶}$ (یک‌ششم طول ضلع ورقهٔ آهن سفید) جدا کرد تا با باقی‌ماندهٔ آهن سفید، جعبهٔ مکعب مستطیلی با بیشترین مقدار حجم به‌دست آید.

۷۲. فرض می‌کنیم مخروطی در کره محاط شده باشد. اگر صفحه‌ای را از راس مخروط و مرکز کره بگذرانیم، در برخورد با کره و مخروط، شکلی شبیه شکل ۴۸ به‌وجود می‌آورد. در این شکل، مثلث ABC متساوی‌الساقین، AH (که از O مرکز کره می‌گذرد)، ارتفاع مخروط و BC، قطری از قاعدهٔ مخروط است. اگر طول پاره‌خط راست OH را x و شعاع قاعدهٔ مخروط را r بنامیم، به‌دست می‌آید: $r^۲ = R^۲ - x^۲$ (در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC). بنابراین، حجم مخروط، که آن را با V نشان می‌دهیم) چنین است:

$$V = \frac{\pi}{۳}(R^۲ - x^۲)(R + x)$$

که در آن، $R^۲ - x^۲$ مجذور شعاع قاعده و $R + x$ ارتفاع مخروط است. V را می‌توان این‌طور نوشت:

$$V = \frac{۲\pi}{۳}[(۲R - ۲x)(R + x)(R + x)]$$

مجموع سه عامل‌ضرب در داخل کروشه (که مقدارهایی مثبت‌اند)، مقداری ثابت است:

$$(۲R - ۲x) + (R + x) + (R + x) = ۴R$$

بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که، این عامل‌ها، با هم برابر باشند، یعنی

$$۲R - ۲x = R + x \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}R$$

که از آن‌جا، برای h، ارتفاع مخروط به‌دست می‌آید:

$$h = \frac{۱}{۳}R + R = \frac{۴}{۳}R$$

۷۳. بیشترین مقدار $\cos x$ (و درنتیجه، بیشترین مقدار $\cos^۲ x$) برابر است با ۱، بنابراین $\cos^۲ x + ۵$ نمی‌تواند از ۶ بیشتر باشد و داریم:

$$\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵ \leq ۶ - ۴\cos x = ۲(۳ - ۲\cos x)$$

از آن‌جا، باتوجه به مثبت بودن $۳ - ۲\cos x$، می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵}{۳ - ۲\cos x} \leq \frac{۲(۳ - ۲\cos x)}{۳ - ۲\cos x} = ۲$$

بیشترین مقدار y، برابر است با ۲ که به‌ازای $\cos x = ۱$ یا $\cos x = -۱$ به‌دست می‌آید.

اکنون، y را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$y = \frac{\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵}{۳ - ۲\cos x} = \frac{۴\cos^۲ x - ۱۶\cos x + ۲۰}{۴(۳ - ۲\cos x)} =$$
$$= \frac{(۴\cos^۲ x - ۱۲\cos x + ۹) + (۶ - ۴\cos x) + ۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} =$$

$$= \frac{(۳ - ۲\cos x)^۲ + ۲(۳ - ۲\cos x) + ۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} =$$

$$= \frac{۳ - ۲\cos x}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)}$$

از طرف دیگر، باتوجه به نابرابری کوشی برای دو مقدار مثبت داریم:

$$\frac{۳ - ۲\cos x}{۴} + \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} \geq$$

$$\geq ۲\sqrt{\frac{۳ - ۲\cos x}{۴} \cdot \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)}} = ۲\sqrt{\frac{۵}{۱۶}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$$

و بنابراین، برای مقدار y خواهیم داشت:

$$y = \frac{۳ - ۲\cos x}{۴} + \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} + \frac{۱}{۲} \geq \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} + ۱)$$

y وقتی به این کمترین مقدار می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{۳ - ۲\cos x}{۴} = \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} \Rightarrow \cos x = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

پاسخ. $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} + ۱) \leq y \leq ۲$. حداکثرمقدار y با $\cos x = \pm ۱$ و حداقل آن با $\cos x = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۷۳. ۱) $۱-$ را از سمت راست نابرابری به سمت چپ می‌بریم و به یک کسر تبدیل می‌کنیم؛ نابرابری به صورت $\frac{۳ - x}{۲ - x} < ۰$ درمی‌آید. اگر $x \neq ۲$ بگیریم، می‌توانیم از این مطلب روشن استفاده کنیم که، علامت خارج‌قسمت دو مقدار، همان علامت حاصل ضرب آن‌ها است، یعنی دو نامعادلهٔ

$$\frac{۳ - x}{۲ - x} < ۰,\ (۳ - x)(۲ - x) < ۰\ (x \neq ۲)$$

هم‌ارزند. سمت چپ نامعادلهٔ اخیر، یک عبارت درجه دوم با ریشه‌های ۲ و ۳ و ضریب $x^۲$ برابر واحد است. می‌دانیم علامت عبارت درجه دوم، وقتی به‌جای

مجهول عددی را قرار دهیم که مقدار آن بین دو مقدار ریشه‌ها باشد، حاصل عبارت علامتی مخالف علامت ضریب $x^۲$ پیدا می‌کند. چون ضریب $x^۲$ علامتی مثبت دارد، بنابراین اگر $۲ < x < ۳$، آن‌وقت علامت حاصل $(x - ۲)(x - ۳)$ منفی (مخالف علامت ضریب $x^۲$) می‌شود.

پاسخ. $۲ < x < ۳$.

$$۲)\ -\frac{۱}{۵}(۳x + ۲) > -۳ \Rightarrow -\frac{۳x + ۲}{۵} + ۳ > ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-۳x - ۲ + ۱۵}{۵} > ۰ \Rightarrow \frac{-۳x + ۱۳}{۵} > ۰ \Rightarrow -۳x + ۱۳ > ۰$$

از آن‌جا $-۳x > -۱۳$ و $x < ۴\frac{۱}{۳}$ (وقتی دو طرف نابرابری را بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند).

۳) *پاسخ*. $x < -\frac{۸}{۷}$؛ ۴) $x^۲ + ۱$ به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی x مثبت است. بنابراین، نامعادلهٔ مفروض به‌صورت $۴x - ۱ \geq ۰$ درمی‌آید. از آن‌جا $x \geq \frac{۱}{۴}$.

۷۵. ۱) برای این‌که معادلهٔ درجه دوم، دو ریشهٔ حقیقی و نابرابر داشته باشد، باید مبین آن برابر مقداری مثبت باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = (۲m + ۱)^۲ - ۴(m^۲ + m + ۱) \geq ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (۴m^۲ + ۴m + ۱) - (۴m^۲ + ۴m + ۴) > ۰$$

نامعادله، منجر به $-۳ > ۰$ می‌شود که ممکن نیست. این معادلهٔ درجه دوم، به‌ازای هیچ مقداری از m، ریشه‌های حقیقی ندارد.

پاسخ. $m \in \phi$.

۲) مبیّن معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = ۴m^۲ - ۴(m + ۱)(m - ۱) = ۴m^۲ - ۴(m^۲ - ۱) = ۴$$

معادله به‌ازای هر مقدار m، ریشه‌های حقیقی دارد.

پاسخ. $m \in \mathbf{R}$ و $m \neq ۱$.

$$۳)\ \Delta = (۲m+۳)^۲ - ۴m(m-۱) = ۱۶m + ۹ > ۰$$

پاسخ. $m > -\frac{۹}{۱۶}$ (معادله، به‌ازای $m = -\frac{۹}{۱۶}$، دو ریشهٔ حقیقیِ برابر دارد).

$$۴)\ \Delta = m^۲ - ۴(m-۱) = m^۲ - ۴m + ۴ = (m-۲)^۲$$

مبین معادله، به‌ازای $m = ۲$ برابر صفر می‌شود و، به‌ازای سایر مقدارهای m، مثبت است.

پاسخ. $m = \mathbf{R} - \{۲\}$.

$$۵)\ \Delta = ۱ + ۴(۲m-۱) = ۸m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > \frac{۳}{۸}$$

$$۶)\ \Delta = m^۲ - ۴(m+۱) = m^۲ - ۴m - ۴$$

عبارت درجه دوم $m^۲ - ۴m - ۴$ دو ریشهٔ حقیقی دارد: $۲ \pm ۲\sqrt{۲}$. برای این‌که مقدار Δ مثبت باشد، باید مقدار m بیرون این دو ریشه باشد.

پاسخ. $m < ۲ - ۲\sqrt{۲}$ یا $m > ۲ + ۲\sqrt{۲}$.

۷) معادله، بعد از ضرب پرانتزها به این صورت درمی‌آید:

$$۳x^۲ - ۲(m+۱)x + m - ۲ = ۰$$

که از آن‌جا، مبین معادله چنین می‌شود:

$$\Delta = ۴(m^۲ - m + ۷) = ۴\left[\left(m - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۲۷}{۴}\right] = ۴\left(m - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + ۲۷$$

که مثبت بودن آن روشن است. معادله به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی m، دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۷۶. ۱) بعد از ضرب پرانتزها و بردن عدد ۳۰، از سمت راست به سمت چپ نابرابری، به دست می‌آید:

$$x^۲ - ۳x - ۲۸ > ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۷) > ۰$$

پاسخ. $x < -۴$ یا $x > ۷$.

۲) بعد از ضرب پرانتزها و انتقال همهٔ جمله‌ها به سمت چپ نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$x^۲ - x + ۳ > ۰$$

عبارت درجه دوم $x^۲ - x + ۳$ ریشه‌های موهومی دارد و، بنابراین، علامت این سه‌جمله‌ای، به‌ازای هر مقدار حقیقی x، همان علامت ضریب $x^۲$، یعنی مثبت است.

پاسخ. نامعادله، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی x برقرار است: $x \in \mathbf{R}$.

۳) کسر سمت راست نابرابری را به سمت چپ می‌بریم: بعد از تبدیل به یک مخرج، به‌دست می‌آید: $\frac{x^۲ + ۲x}{x + ۱} > ۰$. صورت کسر عبارتی درجه دوم و مخرج آن درجه اول است. ریشه‌های صورت کسر ۲− و ۰ و ریشهٔ مخرج کسر ۱− است. باتوجه به تعیین علامت‌های عبارت درجه دوم و درجه اول، می‌توانیم به این جدول برسیم:

x	$-\infty$	-۲		-۱		۰	$+\infty$
$x^۲ + ۲x$	$+$	●	$-$		$-$	●	$+$
$x + ۱$	$-$		$-$	●	$+$		$+$
$\frac{x^۲ + x}{x + ۱}$	$-$	●	$+$		$-$	●	$+$

پاسخ. $x < -۲$ یا $-۱ < x < ۰$.

۴) نامعادله به‌صورت $\frac{۴x^۲ - ۱۵x - ۴}{۴x} \geq ۰$ درمی‌آید.

پاسخ. $-\frac{۱}{۴} \leq x < ۰$ یا $x \geq ۴$.

۵) پاسخ. $x < -2$.

۶) پاسخ. $x < -4$ یا $0 \le x < 4$.

۷۷. اگر معادله را، به‌صورت عادی تبدیل کنیم، یعنی با مخرج مشترک گرفتن بین کسرها آغاز کنیم، گرچه سرانجام به نتیجه می‌رسیم، ولی گرفتار عمل‌های کم و بیش طولانی می‌شویم که احتمال اشتباه را بالا می‌برد. معادله را، به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0;$$
$$\frac{x-ab-bc-ca}{a+b}+\frac{x-ab-bc-ca}{a+c}+\frac{x-ab-bc-ca}{b+c}=0;$$
$$(x-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0;$$
$$x=ab+bc+ca$$

البته، این جواب، به شرطی تنها جواب معادله است که داشته باشیم:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\neq 0$$

پاسخ.

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\neq 0\right)\ x=ab+bc+ca$$

۲) بافرض این‌که، هیچ کدام از مقدارهای a، b و c، برابر صفر نباشند، به‌ترتیب داریم:

$$\frac{(ax-a^2)+(bx-b^2)+(cx-c^2)}{abc}=\frac{2(ab+bc+ac)}{abc};$$
$$(a+b+c)x=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac;$$
$$(a+b+c)x=(a+b+c)^2$$

و به شرط $a+b+c\neq ۰$: $x=a+b+c$

پاسخ. $x=a+b+c$ ($a-b+c\neq ۰$، $a\neq ۰$، $b\neq ۰$، $c\neq ۰$).

۷۸. از مجموع چهار معادلهٔ دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x+y+z+u=\frac{۱}{۳}(a+b+c+d) \qquad (*)$$

با کم کردن هریک از معادله‌های دستگاه، از معادلهٔ $(*)$، جواب دستگاه به‌دست می‌آید.

پاسخ. $x=\frac{۱}{۳}(a+b+c-۲d)$، $y=\frac{۱}{۳}(a+b-۲c+d)$، $z=\frac{۱}{۳}(a-۲b+c+d)$، $u=\frac{۱}{۳}(-۲a+b+c+d)$.

۲) پاسخ. $x=\frac{۳}{a+b+c-۲d}$، $y=\frac{۳}{a+b-۲c+d}$، $z=\frac{۳}{a-۲b+c+d}$، $u=\frac{۳}{-۲a+b+c+d}$ (با این شرط که از عددهای a، b، c و d، مجموع سه عدد با دوبرابر عدد چهارم، برابر نباشد).

۷۹. اگر عبارت درجه دوم سمت چپ برابری را $f(x)$ بنامیم، داریم:

$$f(a)=\lambda(a-b)(a-d);\ f(c)=\lambda(c-b)(c-d);$$
$$f(a)f(c)=\lambda^{۲}(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)$$

باتوجه به فرض مساله، داریم: $a-b>۰$، $a-d<۰$، $c-b>۰$ و $c-d<۰$، بنابراین، باتوجه به این‌که $\lambda^{۲}$ عددی نامنفی است، به‌دست می‌آید:

$$f(a)\cdot f(c)\leq ۰$$

در حالت صفر بودن $f(a)f(c)$، دست‌کم یکی از دو عدد a و c، ریشه‌ای از معادلهٔ $f(x)=۰$ است و وقتی معادلهٔ درجه دوم، یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد، بی‌تردید ریشهٔ دوم آن هم، عددی حقیقی است.

در حالت $f(a)f(c) < ۰$، باتوجه به §۴، متن درس در حالت ۴)، معادلهٔ $f(x) = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است که یکی از آنها بین دو عدد a و c و دیگری در بیرون این دو عدد است؛ یعنی اگر ریشه‌های $f(x) = ۰$ را $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱ < x_۲)$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$x_۱ < a < x_۲ < c \text{ یا } a < x_۱ < c < x_۲$$

۸۰. اگر این دو معادله، هیچ‌کدام، ریشه‌های حقیقی نداشته باشند، باید مبین هر دو معادله منفی باشد:

$$p^۲ - ۴q < ۰,\ p_۱^۲ - ۴q_۱ < ۰$$

از مجموع این دو نابرابری (که هم جهت‌اند)، به‌دست می‌آید:

$$p^۲ + p_۱^۲ - ۴(q + q_۱) < ۰ \Rightarrow p^۲ + p_۱^۲ - ۲pp_۱ < ۰$$

(به‌جای $۲(q + q_۱)$، مقدارش $pp_۱$ را قرار دادیم). درنتیجه، به نابرابری ناممکن

$$(p - p_۱)^۲ < ۰$$

می‌رسیم. به این ترتیب، فرض ما، مبنی بر این‌که هر دو معادله ریشه‌های موهومی دارند، نادرست است و، دست‌کم، یکی از آنها دارای ریشه‌های حقیقی است.

۸۱. بعد از باز کردن پرانتزها، معادلهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$(a + b + c)x^۲ - ۲(ab + bc + ca)x + ۳abc = ۰$$

ثابت می‌کنیم، مبین این معادله، نامنفی است. داریم:

$$\Delta = ۴(ab + bc + ca)^۲ - ۱۲abc(a + b + c) =$$
$$= (۲a^۲b^۲ + ۲b^۲c^۲ - ۴ab^۲c) +$$

$$+(2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 4abc^2) +$$
$$+(2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 4a^2bc) =$$
$$= 2(ab - bc)^2 + 2(bc - ca)^2 + 2(ab - ca)^2$$

که مقداری نامنفی است.

۸۲. باید ثابت کنیم: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a^2}{3} \geq 0$. اگر به‌جای z، مقدارش را از فرض مساله قرار دهیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a^2}{3} = x^2 + y^2 + (a - x - y)^2 - \frac{a^2}{3} =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2ay + 2xy + \frac{2a^2}{3} =$$
$$= 2\left[y^2 + (x - a)y + \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{3}\right)\right] \qquad (*)$$

داخل کروشه، نسبت به y، عبارتی درجه دوم و مبین آن چنین است

$$\Delta = (x - a)^2 - 4\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{3}\right) = -3x^2 + 2ax - \frac{a^2}{3} =$$
$$= -\frac{1}{3}(9x^2 - 6ax + a^2) = -\frac{1}{3}(3x - a)^2 \leq 0$$

وقتی مبین یک عبارت درجه دوم مثبت نباشد، علامت عبارت، به‌ازای هر مقدار مجهول، علامتی هم‌علامت ضریب درجه دوم پیدا می‌کند، مگر وقتی که مبین برابر صفر باشد و به‌جای مجهول، ریشهٔ مضاعف سه‌جمله‌ای را قرار دهیم. به این ترتیب، مقدار داخل کروشه در $(*)$، همیشه نامنفی است، یعنی

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a^2}{3} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}a^2$$

۸۳.

$$1)\ S_{-1} = x_1^{-1} + x_2^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{a}{b};$$

$$2)\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2b;$$

$$3)\ S_{-2} = x_1^{-2} + x_2^{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{a^2 - 2b}{b^2};$$

$$4)\ S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 -$$

$$-3x_1x_2(x_1 + x_2) = -a^3 + 3ab;$$

$$5)\ S_{-3} = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{-a^3 + 3ab}{b^3};$$

$$6)\ S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$

$$= (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2;$$

$$7)\ S_{-4} = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^4} = \frac{a^4 - 4a^2b + 2b^2}{b^4};$$

۸) $S_{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$، آن‌وقت $S_{\frac{1}{2}}^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}$؛ یعنی

$$S_{\frac{1}{2}}^2 = -a + 2\sqrt{b} \Rightarrow S_{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a + 2\sqrt{b}}$$

$$9)\ S_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\sqrt{-a + 2\sqrt{b}}}{\sqrt{b}}$$

۱۰) چون $S_{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$، پس

$$S_{\frac{1}{4}}^2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1x_2};$$

$$S_{\frac{1}{4}}^2 = \frac{\sqrt{-a + 2\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} + 2\sqrt[4]{b} = m \Rightarrow S_{\frac{1}{4}} = \sqrt{m};$$

$$11)\ S_{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x_2}} = \frac{\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}}{\sqrt[4]{x_1x_2}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{b}}$$

۸۴. ۱) فرض می‌کنیم α ریشهٔ مشترک دو معادله باشد، در این صورت

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \quad \text{و} \quad \alpha^2 + p_1\alpha + q_1 = 0$$

از تفاضل دو معادله به‌دست می‌آید:

$$\alpha(p - p_1) + q - q_1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{q - q_1}{p - p_1}$$

این مقدار α، باید در هریک از دو معادله، و مثلاً در معادلهٔ اول، صدق کند:

$$\left(-\frac{q - q_1}{p - p_1}\right)^2 - p \cdot \frac{q - q_1}{p - p_1} + q = 0;$$

پاسخ. $(q - q_1)^2 = (p - p_1)(pq_1 - p_1q)$.

۲) پاسخ. $(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb')$.

۸۵. اگر سه معادلهٔ دستگاه را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y + z = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

که با قرار دادن در هریک از معادله‌های دستگاه، مقدار مجهول‌ها به‌دست می‌آید:

پاسخ. $x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$، $y = \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$، $z = \frac{\pm c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

۲) دستگاه به‌سادگی به‌این صورت درمی‌آید: $(*)$

$$\begin{cases} (x + y)(x + z) = a \\ (x + y)(y + z) = b \\ (x + z)(y + z) = c \end{cases}$$

و اگر سه معادلهٔ این دستگاه را در هم ضرب کنیم:

$$(x + y)^2(y + z)^2(x + z)^2 = abc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x + y)(x + z)(y + z) = \pm\sqrt{abc}$$

معادلهٔ اخیر را، به ترتیب، بر هریک از معادله‌های دستگاه $(*)$ تقسیم می‌کنیم، به این سه معادله می‌رسیم:

$$y + z = \frac{\pm\sqrt{abc}}{a},\ x + z = \frac{\pm\sqrt{abc}}{b},\ x + y = \frac{\pm\sqrt{abc}}{c}$$

$$x+y+z=\frac{\pm\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$$

با در دست داشتن $y+z$، $x+z$ و $x+y$ می‌توان به‌یاری معادلهٔ اخیر، مقدارهای x و y و z را به‌دست آورد:

$$x=\frac{\pm\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}\right),\ y=\frac{\pm\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right),$$
$$z=\frac{\pm\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right)$$

دستگاه دو جواب دارد (علامت‌های + را با هم و علامت‌های منفی را با هم بگیرید).

۳) جواب $x=۰$، $y=۰$، $z=۰$ روشن است. اکنون فرض می‌کنیم x و y و z مخالف صفر باشند. اگر سه معادله را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^۲y^۲z^۲=abcxyz\Rightarrow xyz=abc$$

با قرار دادن az به‌جای xy، به معادلهٔ $az^۲=abc$ می‌رسیم که، با شرط $a\neq ۰$، مقدار z به‌دست می‌آید و به‌همین ترتیب، برای x و y:

$$x=\pm\sqrt{ac},\ y=\pm\sqrt{ab},\ z=\pm\sqrt{bc},\ (a,b,c\neq ۰)$$

پاسخ. مجموعهٔ جواب‌های دستگاه:

$$\left|\begin{array}{l}x=۰\\y=۰\\z=۰\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{ac}\\y=\sqrt{ab}\\z=\sqrt{bc}\end{array}\right.;$$
$$\left|\begin{array}{l}x=-\sqrt{ac}\\y=-\sqrt{ab}\\z=\sqrt{bc}\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x=-\sqrt{ac}\\y=\sqrt{ab}\\z=-\sqrt{bc}\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{ac}\\y=-\sqrt{ab}\\z=-\sqrt{bc}\end{array}\right.$$

۴) دو معادلهٔ دستگاه را، یک بار با هم جمع و یک بار از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^۳ + y^۳ = (a+b)(x+y) \\ x^۳ - y^۳ = (a-b)(x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x^۲ - xy + y^۲ - a - b) = ۰ \\ (x-y)(x^۲ + xy + y^۲ - a + b) = ۰ \end{cases}$$

به‌این ترتیب، باید چهار دستگاه را، به‌طور جداگانه، حل کنیم:

$$\text{(الف} \begin{cases} x + y = ۰ \\ x - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ y = ۰ \end{array} \right.$$

$$\text{(ب} \begin{cases} x + y = ۰ \\ x^۲ + xy + y^۲ = a - b \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{a-b} \\ y = \mp\sqrt{a-b} \end{array} \right.$$

($x > ۰$ و $y < ۰$ یا $x < ۰$ و $y > ۰$).

$$\text{(ج} \begin{cases} x - y = ۰ \\ x^۲ - xy + y^۲ = a + b \end{cases} \Rightarrow x = y = \pm\sqrt{a+b}$$

$$\text{(د} \begin{cases} x^۲ - xy + y^۲ = a + b \\ x^۲ + xy + y^۲ = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ = a \\ xy = -b \end{cases}$$

اگر در دستگاه اخیر، دو برابر معادلهٔ دوم را، یک بار با معادلهٔ اول جمع و یک بار از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} (x+y)^۲ = a - ۲b \\ (x-y)^۲ = a + ۲b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm\sqrt{a - ۲b} \\ x - y = \pm\sqrt{a + ۲b} \end{cases}$$

که از آن، به چهار دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{a - ۲b} \\ x - y = \sqrt{a + ۲b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y = -\sqrt{a - ۲b} \\ x - y = \sqrt{a + ۲b} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{a - ۲b} \\ x - y = -\sqrt{a + ۲b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y = -\sqrt{a - ۲b} \\ x - y = -\sqrt{a + ۲b} \end{cases}$$

که جواب‌های هر چهار دستگاه را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{a-2b} + \eta\sqrt{a+2b}) \\ y = \frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{a-2b} - \eta\sqrt{a+2b}) \end{cases}$$

که در آن، ε و η، جدا از هم و به‌طور مستقل، می‌توانند مقدارهای ۱+ و ۱− را اختیار کنند.

۸۶. در آغاز، به این اتحاد جبری توجه کنید:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = x^2(y+z) + \\ + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz \qquad (1)$$

اثبات درستی این اتحاد دشوار نیست. می‌توان هر سمت برابری را به‌صورت یک چندجمله‌ای درآورد و مشاهده کرد که، این دو چندجمله‌ای بر هم منطبق‌اند. ولی در این‌جا، با روش دیگری، درستی این اتحاد را تحقیق می‌کنیم. چه سمت چپ و چه سمت راست برابری، نسبت به x از درجهٔ دوم است. بنابراین، اگر برابری اتحاد نباشد، به معنای آن است که، نسبت به مجهول x، معادله‌ای از درجه دوم است. معادلهٔ درجه دوم، حداکثر دو ریشهٔ حقیقی دارد. اگر یک معادلهٔ درجه دوم به‌ازای بیش از دو مقدار x برقرار باشد، باید نتیجه گرفت که یک اتحاد است. تحقیق می‌کنیم، سه مقدار $x_1 = 0$، $x_2 = -y$ و $x_3 = -z$ در این برابری صدق می‌کند. به‌ازای $x_1 = 0$، سمت چپ برابری به‌صورت

$$(0+y)(y+z)(z+0) = yz(y+z) = y^2z + yz^2$$

درمی‌آید و سمت راست برابری به‌صورت

$$y^2(0+z) + z^2(0+y) = y^2z + yz^2$$

یعنی $x_1 = 0$ در برابری صدق می‌کند. $x_2 = -y$ را در برابری قرار می‌دهیم. مقدار سمت چپ برابری برابر صفر و مقدار سمت راست آن

$$(-y)^2(y+z) + y^2(-y+z) + 2yz(-y) =$$
$$= y^2[(y+z) + (-y+z)] - 2y^2z = 2y^2z - 2y^2z = 0$$

به همین ترتیب، روشن می‌شود که $x_3 = -z$ در برابری صدق می‌کند. معادلهٔ درجه دومی که بیش از دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، معادله نیست و یک اتحاد است.

اکنون به حل مساله می‌پردازیم. از ضرب برابری‌های

$$x^2(y+z) = a^3,\ y^2(x+z) = b^3,\ z^2(x+y) = c^3 \qquad (2)$$

در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x) = a^3b^3c^3$$

که باتوجه به برابری $xyz = abc$، نتیجه می‌شود:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = abc$$

به‌جای سمت چپ برابری، مقدارش را از اتحاد (۱) قرار می‌دهیم:

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz = abc \qquad (3)$$

ولی باتوجه به مجموع برابری‌های (۲) داریم:

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = a^3 + b^3 + c^3$$

درضمن می‌دانیم $xyz = abc$. بنابراین، برابری (۳) چنین می‌شود:

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$$

۸۷. ۱) با تبدیل $\cot x$ به $\tan x$، به معادلهٔ درجه دوم

$$a\tan^{۲} x - c\tan x + b = ۰, \quad (\tan x \neq ۰)$$

می‌رسیم. $\tan x$ می‌تواند هر عدد حقیقی را بپذیرد. بنابراین، برای حقیقی بودن ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم (نسبت به $\tan x$)، کافی است مبین آن نامنفی باشد.

پاسخ. $c^{۲} \geq ۴ab$.

۲) اگر معادله را، تنها برحسب $\sin x$ یا تنها برحسب $cosx$ بنویسیم، با دو دشواری روبه‌رو می‌شویم. فرض کنید، معادله را تنها برحسب $\sin x$ بنویسیم؛ به این صورت درمی‌آید:

$$a\sin x \pm b\sqrt{۱ - \sin^{۲} x} = c$$

که معادله‌ای گنگ است و، برای حل آن، ناچاریم، بعد از بردن جملهٔ $a\sin x$ به سمت راست برابری، دو طرف را مجذور کنیم. ولی با مجذور کردن دو سمت یک معادله، ممکن است ریشه‌های بیرونی وارد آن شود و، باتوجه به ضریب‌های حرفی a، b و c، تشخیص ریشه‌های بیرونی، چندان ساده نیست. از این گذشته، بعد از گویا کردن معادله، به معادله‌ای درجه دوم، با مجهول $\sin x$ می‌رسیم و روشن است که تنها مثبت بودن مبین معادله، به معنای داشتن ریشه‌های حقیقی نیست، زیرا $\sin x$ نمی‌تواند هر عدد حقیقی را بپذیرد و باید داشته باشیم $|\sin x| \leq ۱$. یعنی، به‌جز نامنفی بودن مبین، در این‌باره استدلال کنیم که، با چه شرطی، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجه دوم، قدرمطلقی بزرگتر از واحد ندارند.

بنابراین، باید راه دیگری برای حل مساله بیندیشیم.

فرض می‌کنیم $\sin x = X$ و $\cos x = Y$؛ یعنی $X^{۲} + Y^{۲} = ۱$. به این دستگاه می‌رسیم:

$$X^{۲} + Y^{۲} = ۱ \text{ و } aX + bY = c$$

معادلهٔ ما وقتی جواب دارد که این دستگاه جواب داشته باشد، یعنی خط راست $aX + bY = c$، دایرهٔ $X^۲ + Y^۲ = ۱$ را قطع کند. برای این منظور باید فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی $O(۰, ۰)$ از خط راست، کوچکتر از شعاع دایره $(R = ۱)$ باشد، یعنی

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \leq ۱ \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲ + b^۲} \leq ۱ \Rightarrow a^۲ + b^۲ \geq c^۲$$

و این، شرط وجود ریشه‌های حقیقی برای معادله است.

***یادداشت.** مساله را به‌صورت مثلثاتی هم می‌توان حل کرد.

دو حالت در نظر می‌گیریم: در حالت اول فرض می‌کنیم $a = ۰$. معادله به‌صورت

$$b \cos x = c \Rightarrow \cos x = \frac{c}{b}$$

درمی‌آید که، شرط وجود ریشه‌های حقیقی برای آن، عبارت است از

$$-۱ \leq \frac{c}{b} \leq ۱ \Rightarrow |c| \leq |b|$$

بنابراین، معادله در حالت $a = ۰$ و $|c| \leq |b|$، ریشه‌های حقیقی دارد.

حالت دوم $a \neq ۰$. دو طرف معادله را بر a (که برابر صفر نیست) تقسیم می‌کنیم:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

$\frac{b}{a}$ هر عددی باشد، می‌تواند برابر با تانژانت زاویه‌ای شود. این زاویه را α می‌نامیم:

$$\frac{b}{a} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

معادلهٔ ما به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

($\cos\alpha \neq 0$، زیرا اگر $\cos\alpha = 0$، آن‌وقت $\tan\alpha$ معنای خود را از دست می‌دهد). با تبدیل سمت چپ برابری (بخش بعد ـ بخش ۳ـ را در همین کتاب ببینید):

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

قدرمطلق مقدار سینوس، نمی‌تواند از واحد بزرگتر باشد، بنابراین

$$\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha \leq 1 \qquad (*)$$

از طرف دیگر، چون $\tan\alpha = \frac{b}{a}$، داریم:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

بنابراین، نابرابری (*) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq 1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq c^2$$

۸۸. ۱) ضریب درجهٔ دوم و مقدار ثابت معادله، علامت‌های مختلفی دارند، زیرا

$$(m-1)(1-m) = -(m-1)^2 < 0,\ (m \neq 1)$$

و وقتی a و c (ضریب درجه دوم و مقدار ثابت)، هم‌علامت نباشند، معادلهٔ درجه دوم، دو ریشه دارد که یکی مثبت و دیگری منفی است.

۲) اگر ریشه‌های معادله را x_1 و x_2 بنامیم، باید داشته باشیم:

$$x_1 + x_2 < x_1x_2 \Rightarrow \frac{3m}{m-1} < -1 \Rightarrow \frac{4m-1}{m-1} < 0$$

پاسخ. $\frac{۱}{۴} < m < ۱$.

۳) باید داشته باشیم:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ < \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ < \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱x_۲}$$

$x_۱ + x_۲ = \frac{۳m}{m - ۱}$ و $x_۲x_۲ = -۱$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۹m^۲}{(m-۱)^۲} + ۲ < -\frac{۳m}{m-۱} \Rightarrow \frac{۹m^۲}{(m-۱)^۲} + \frac{۳m}{m-۱} + ۲ < ۰$$

اگر فرض کنیم $\frac{۳m}{m-۱} = t$، به این نامعادله می‌رسیم:

$$t^۲ + t + ۲ < ۰$$

سه‌جمله درجه دوم $t^۲ + t + ۲$، ریشه‌های حقیقی ندارد و، بنابراین، به‌ازای هر مقدار t، علامتی موافق علامت a پیدا می‌کند. یعنی همیشه مثبت می‌شود. نامعادله جوابی برای t، و درنتیجه، برای m ندارد.

پاسخ. نه، ممکن نیست.

۸۹. الف) اگر ضریب درجه دوم را a و عبارت سمت چپ معادلهٔ $(*)$ را $f(x)$ بنامیم، وقتی $af(۱)$ مقداری منفی باشد، هم به‌معنای این است که $f(x) = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی دارد و هم به این معناست که عدد ۱ بین دو ریشهٔ معادله است. بنابراین برای این‌که داشته باشیم $x_۱ < ۱ < x_۲$ ($x_۱$ و $x_۲$، ریشه‌های معادله‌اند)، باید داشته باشیم:

$$af(۱) = (m+۲)[(m+۲) - (m+۱) + m] = (m+۲)(m+۱) < ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $-۲ < m < -۱$.

ب) باید داشته باشیم: $1 < x_1 < 2 < x_2$. چون عدد ۲ بین دو ریشه است، پس $af(2) < 0$، و چون عدد ۱ از دو ریشه کوچکتر (و بیرون دو ریشه) است، پس $af(1) > 0$. به این ترتیب، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} af(2) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+2)(3m+6) < 0 \\ (m+2)(m+1) > 0 \end{cases}$$

نامعادلهٔ اول این دستگاه به‌صورت $3(m+2)^2 < 0$ درمی‌آید که جواب ندارد.

پاسخ. به‌ازای هیچ مقداری از m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ بین ۱ و ۲ و ریشهٔ دیگر بزرگتر از ۲ نمی‌شود.

۹۰. ۱) به‌ترتیب داریم:

$$\frac{2}{x^2-1} \geq \frac{1}{x^2+5x+6};\ \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+5x+6} \geq 0;$$

$$\frac{x^2+10x+13}{(x^2-1)(x^2+5x+6)} \geq 0$$

ریشه‌های عبارت‌های درجه دوم صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1;\ x^2+5x+6=0 \Rightarrow x=-2,-3;$$

$$x^2+10x+13=0 \Rightarrow x=-5\pm 2\sqrt{3}$$

و به‌یاری یک جدول، علامت‌های عبارت‌های درجه دوم و، سپس، علامت کسر سمت چپ نابرابری را، به‌ازای مقدارهای مختلف x، پیدا می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-5-2\sqrt{3}$	-3	-2	$-5+2\sqrt{3}$	-1	1
$x^2+5x+13$	+	−	−	−	+	+	+
x^2-1	+	+	+	+	+	−	+
x^2+5x+6	+	+	−	+	+	+	+
کسر	+	−	+	−	+	−	+

پاسخ. $x \leq -5 - 2\sqrt{3}$، $-3 < x < -2$، $-5 + 2\sqrt{3} \leq x < -1$، $x > 1$.

۲) به‌ترتیب داریم:

$$\frac{a^2+1}{a-x} - a > 0;\ \frac{ax+1}{a-x} > 0$$

که بافرض $x \neq a$، می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$(ax+1)(a-x) > 0$$

سمت چپ نابرابری، عبارت درجه دومی است با ضریب درجه دوم $-a$ و ریشه‌های $-\frac{1}{a}$ و a. جواب را باید، برای حالت‌های $a > 0$، $a < 0$ و $a = 0$ به‌طور جداگانه به‌دست آورد.

پاسخ. برای $a > 0$: $-\frac{1}{a} < x < a$؛ برای $a < 0$: $a < x < -\frac{1}{a}$ و برای $a = 0$: $x < 0$

مثلثات

۹۱. به‌ترتیب داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1+2}{1-2} = -3;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

در واقع دو کمان $\frac{\pi}{4}+\alpha$ و $\frac{\pi}{4}-\alpha$ متمم یکدیگرند، یعنی مجموعی برابر $\frac{\pi}{2}$ دارند. درنتیجه

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=-\frac{1}{3};$$

برای محاسبهٔ $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$، در آغاز $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را محاسبه می‌کنیم؛ داریم:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

انتهای کمان α در ربع سوم و، بنابراین کسینوس آن منفی است.

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

اکنون $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}}$$

۹۲. زاویه را x درجه می‌گیریم. هر درجه برابر $\frac{10}{9}$ گراد و، بنابراین، x درجه برابر $\frac{10x}{9}$ گراد است. هر درجه برابر $\frac{\pi}{180}$ رادیان و، بنابراین، x درجه برابر $\frac{\pi x}{180}$ رادیان است. بنا بر فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{x}-\frac{9}{10x}=\frac{\frac{\pi x}{180}}{2\pi}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{x}{36}\Rightarrow x=6^\circ$$

۹۳. شبیه یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی، $\cos x$ و $\cot x$ را برحسب m و n به‌دست می‌آوریم:

$$\cos x = \frac{۲m - n}{۳},\ \cot x = -\frac{m - ۲n}{۳} \Rightarrow \tan x = \frac{-۳}{m - ۲n}$$

و در رابطهٔ $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ قرار می‌دهیم:

$$۱ + \left(\frac{-۳}{m - ۲n}\right)^۲ = \frac{۹}{(۲m - n)^۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m - ۲n)^۲(۲m - n)^۲ = ۲۷(n^۲ - m^۲)$$

۹۴. ۳α را به‌صورت $۲\alpha + \alpha$ می‌نویسیم. داریم:

$$\sin ۳\alpha = \sin(۲\alpha + \alpha) = \sin ۲\alpha \cos \alpha + \cos ۲\alpha \sin \alpha =$$

$$= ۲ \sin \alpha \cos^۲ \alpha + (۱ - ۲\sin^۲) \sin \alpha =$$

$$= ۲\sin \alpha(۱ - \sin^۲ \alpha) + \sin \alpha - ۲\sin^۳ \alpha$$

از آن‌جا: $\sin ۳\alpha = -۴\sin^۳ \alpha + ۳\sin \alpha$.

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید: $\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳ \alpha - ۳\cos \alpha$.

۹۵. اگر در آغاز $y + z$ را یک کمان به حساب آوریم، به‌ترتیب داریم:

$$\tan[x + y + z] = \frac{\tan x + \tan(y + z)}{۱ - \tan x \tan(y + z)} =$$

$$\frac{\tan x + \dfrac{\tan y + \tan z}{۱ - \tan y \tan z}}{۱ - \tan x \cdot \dfrac{\tan y + \tan z}{۱ - \tan y \tan z}} =$$

$$= \frac{\tan x(۱ - \tan y \tan z) + \tan y + \tan z}{۱ - \tan y \tan z - \tan x(\tan y + \tan z)}$$

که سرانجام به این نتیجه می‌رسیم:

$$\tan(x+y+z)=\frac{\tan x+\tan y+\tan z-\tan x\tan y\tan z}{1-\tan x\tan y-\tan y\tan z-\tan z\tan x}$$

۹۶. ۱۸ درجه برابر است با $\frac{\pi}{10}$ رادیان. روشن است، کمان‌های $\frac{3\pi}{10}$ و $\frac{2\pi}{10}$ متمم یکدیگرند (مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود). بنابراین $\cos\frac{3\pi}{10}$ با $\sin\frac{2\pi}{10}$ برابر است. اگر $\frac{\pi}{10}$ را α بنامیم، داریم:

$$\cos 3\alpha=\sin 2\alpha\Rightarrow 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

(از نتیجه مسالهٔ ۹۴ استفاده کردیم). روشن است که $\cos\alpha\neq 0$. دو طرف برابری را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$4\cos^2\alpha-3=2\sin\alpha\Rightarrow 4(1-\sin^2\alpha)-3=2\sin\alpha$$

و سرانجام، به این معادلهٔ درجه دوم برحسب $\sin\alpha$ می‌رسیم:

$$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0\Rightarrow \sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\alpha=18^\circ$ زاویه‌ای حاده و سینوس آن مثبت است. یعنی

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

۹۷. $z=x^2$ می‌گیریم. به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$z^2-\left(\frac{1}{3}\sin\alpha\right)z+\frac{1}{400}=0 \qquad (1)$$

که با فرض $\sin\alpha>0$، دارای دو ریشهٔ مثبت است (زیرا حاصل‌ضرب و مجموع دو ریشه، مقدارهایی مثبت‌اند). اگر این دو ریشه را z_1 و z_2 بنامیم، برای x، چهار

جواب به‌دست می‌آید که دوبه‌دو، قرینهٔ یکدیگرند. اگر این ریشه‌های x را $\pm x_1$ و $\pm x_2$ و درضمن $x_2 > x_1 > 0$ بگیریم، بنابر شرط مساله، باید چهار عدد

$$-x_2, -x_1, x_1, x_2$$

به همین ردیف، به تصاعد حسابی باشند که، باتوجه به سه جملهٔ اول تصاعد (یا سه جملهٔ آخر آن)، باید داشته باشیم:

$$-2x_1 = x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_2^2 = 9x_1^2 \Rightarrow z_2 = 9z_1$$

به این ترتیب در معادلهٔ (۱)، باید α را طوری پیدا کرد که در آن، یکی از ریشه‌ها، ۹ برابر ریشهٔ دیگر باشد و، درضمن داشته باشیم $\sin\alpha > 0$. می‌دانیم:

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{3}\sin\alpha,\ z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{400}$$

در هر دو برابری، به‌جای z_2، مقدارش $9z_1$ را قرار می‌دهیم:

$$10z_1 = \frac{1}{3}\sin\alpha,\ 9z_1^2 = \frac{1}{400}$$

مقدار z_1 را از برابری اول محاسبه می‌کنیم و در برابری دوم قرار می‌دهیم:

$$9\left(\frac{1}{30}\sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{400} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

تنها جواب مثبت را در نظر گرفتیم، زیرا $\sin\alpha > 0$.

پاسخ. $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ $(k \in \mathbf{Z})$. *به‌ازای* $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ *به معادلهٔ*

$$1200x^4 - 200x^2 + 3 = 0$$

می‌رسیم که چهار ریشه دارد: $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ و $\pm\frac{1}{2\sqrt{15}}$.

۹۸. $\sin a = \frac{۵ - ۳\cos a}{۴}$ را در $\sin^۲ a + \cos^۲ a = ۱$ قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{۵ - ۳\cos a}{۴}\right)^۲ + \cos^۲ a = ۱ \Rightarrow ۲۵\cos^۲ a - ۳۰\cos a + ۹ = ۰$$

که از آن نتیجه می‌شود: $(۵\cos a - ۳)^۲ = ۰$ و $\cos a = \frac{۳}{۵}$. با قرار دادن مقدار $\cos a$ در برابری فرض، مقدار $\sin a$ به‌دست می‌آید: $\sin a = \frac{۴}{۵}$. درنتیجه

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{۴}{۵} : \frac{۳}{۵} = \frac{۴}{۳}$$

۹۹. الف) برای $k \in \mathbf{Z}$، همواره داریم:

$$\sin(k\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

از برابری فرض داریم:

$$a + c = k\pi - (b + d),\ a + d = k\pi - (b + c)$$

بنابراین، برای سمت چپ برابری (۱) داریم:

$$\sin(a + c)\sin(a + d) = \sin[k\pi - (b + d)] \cdot \sin[k\pi - (b + c)]$$
$$= \sin(b + d)\sin(b + c)$$

که همان سمت دوم برابری (۱) است.

ب) $\sin(k\pi + \alpha)$، وقتی k عددی زوج باشد، برابر $\sin \alpha$ و وقتی k عددی فرد باشد، برابری $-\sin \alpha$ است. از رابطهٔ فرض داریم $a = k\pi + b$. k را عددی زوج می‌گیریم، سمت چپ برابری (۱) چنین می‌شود:

$$\sin(a + c)\sin(a + d) = \sin[k\pi + (b + c)]\sin[k\pi + (b + d)]$$
$$= \sin(b + c)\sin(b + d)$$

به همین ترتیب، برای حالت فرد بودن k.

ج) باتوجه به دستورهای (*) و (**) در متن درس داریم:

$$\sin\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}},\ \cos\alpha = \frac{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}} : \left(۱+\frac{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\right) =$$

$$= \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}} : \frac{۲}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}} = \tan\frac{\alpha}{۲}$$

۱۰۰. الف) تابع به‌ازای همهٔ مقدارهای $x \neq \frac{۱}{۲}k\pi$ معین است $(k \in \mathbf{Z})$، یعنی وقتی انتهای کمان x در دایرهٔ مثلثاتی در دو انتهای قطرهای افقی و قائم نباشد (آغاز کمان‌ها، نقطهٔ سمت راست قطر افقی است). درواقع، تابع مفروض، در این حالت‌ها معین نیست.

۱) وقتی $\tan x$ معین نباشد، یعنی وقتی $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$؛

۲) وقتی $\cot x$ معین نباشد، یعنی وقتی $x = k\pi$؛

۳) وقتی داشته باشیم $\cos x + \cot x = ۰$ که از آن به‌دست می‌آید:

$$\cos x\left(۱+\frac{۱}{\sin x}\right) = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰ \text{ یا } \sin x = -۱$$

اگر $\cos x = ۰$، آن‌گاه $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و اگر $\sin x = -۱$، آن‌گاه:

$$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

با جمع‌بندی این حالت‌ها، روشن می‌شود که تابع، به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}k\pi$ معین نیست. دامنهٔ تابع عبارت است از $x \neq \frac{۱}{۲}k\pi$.

ب) تابع مفروض را می‌توان این‌طور نوشت ($x \neq \frac{۱}{۲}k\pi$):

$$\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + \cot x} = \frac{\sin x(۱ + \frac{۱}{\cos x})}{\cos x(۱ + \frac{۱}{\sin x})} = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} \cdot \frac{۱ + \cos x}{۱ + \sin x}$$

$۱ + \cos x$ و $۱ + \sin x$ همواره مثبت‌اند (در دامنهٔ تابع)، زیرا کسینوس و سینوس نمی‌توانند از $۱-$ کوچکتر باشند. بنابراین، تابع مفروض، به‌ازای مقدارهایی از x که متعلق به دامنهٔ آن هستند، همواره مثبت است.

۱۰۱. بنابه فرض داریم: $n = ۷k + ۱$ $(k \in \mathbf{Z})$. در این صورت

$$\frac{n\pi}{۷} - \frac{۱۳\pi}{۱۴} = \frac{(۷k + ۱)\pi}{۷} - \frac{۱۳\pi}{۱۴} = k\pi - \frac{۱۱\pi}{۱۴};$$

$$\frac{۳n\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۱۴} = \frac{۳(۷k + ۱)\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۱۴} = ۳k\pi + \frac{۳\pi}{۱۴};$$

$$\frac{۵n\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۱۴} = \frac{۵(۷k + ۱)\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۱۴} = ۵k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین، در عبارت سمت چپ برابری فرض، جملهٔ سوم برابر صفر است، زیرا

$$\cos\left(۵k\pi + \frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \quad (k \in \mathbf{Z})$$

برای محاسبهٔ مجموع دو جملهٔ اول، دو حالت در نظر می‌گیریم: ۱) k عدد زوج باشد. در این صورت

$$\cos\left(k\pi - \frac{۱۱\pi}{۱۴}\right) + \cos\left(۳k\pi + \frac{۳\pi}{۱۴}\right) = \cos\frac{۱۱\pi}{۱۴} + \cos\frac{۳\pi}{۱۴} = ۰$$

($\frac{11\pi}{14}$ و $\frac{3\pi}{14}$ مکمل یکدیگرند، یعنی مجموعی برابر π دارند، بنابراین مجموع کسینوس‌های آن‌ها برابر صفر است).

۲) اگر k عددی فرد باشد:

$$\cos\left(k\pi - \frac{11\pi}{14}\right) + \cos\left(3k\pi + \frac{3\pi}{14}\right) = -\cos\frac{11\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} = 0$$

یادداشت. وقتی در تقسیم عدد n بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ یا ۴ به‌دست آید، باز هم مساله درست است. خودتان در دو حالت $n = 7k + 3$ و $n = 7k + 4$ آزمایش کنید.

۱۰۲. الف) کمان $\frac{n\pi}{3}$ در یک دور دایرهٔ مثلثاتی (یعنی وقتی داشته باشیم: $0 \le \frac{n\pi}{3} < 2\pi$)، این کمان‌ها را اختیار می‌کند:

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

پاسخ. ۰ و $\pm\sqrt{3}$.

ب) *راهنمایی.* n را در دو حالت زوج و فرد در نظر بگیرید و در هر حالت کمان‌های از صفر تا 2π را پیدا کنید.

پاسخ. $\frac{1}{2}$ و -1.

۱۰۳. عبارتِ مستقل از x، یعنی عبارتی که به x بستگی نداشته باشد. داریم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$= 1 - 3(\sin x\cos x)^2 = 1 - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x;$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

بنابراین، عبارت مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$A = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x + m\left(۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x\right) =$$
$$(m+۱) - \left(\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲}m\right)\sin^۲ ۲x$$

و برای این‌که A به x بستگی نداشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲}m = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۳}{۲}$$

۱۰۴. اگر در دایرهٔ مثلثاتی، انتهای راست قطر افقی را، آغاز کمان‌ها در نظر بگیریم، درضمن محورهای مختصات را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که محور $x'x$ بر قطر افقی و محور $y'y$ بر قطر قائم منطبق باشد، چون در دایرهٔ مثلثاتی، طول شعاع به عنوان واحد انتخاب می‌شود، (x, y) مختصات انتهای هر کمان α، به‌این صورت بیان می‌شود:

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha$$

الف) $x = \cos\alpha$ و $y = \sin\alpha$ قرار می‌دهیم؛ در این صورت خط راست $x - ۲y = ۰$، محیط دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ M و $M_۱$ قطع می‌کند. اگر A آغاز کمان‌ها باشد، دو کمان AM و $AM_۱$ معرف α هستند.

ب) خط راست $x + y = \frac{۶}{۵}$ محیط دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ N و $N_۱$ قطع می‌کند (هر دو نقطهٔ N و $N_۱$، در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی واقع‌اند). کمان‌های AN و $AN_۱$ مُعرف کمان α هستند.

در هر دو حالت الف) و ب)، شکل را رسم کنید.

۱۰۵. داریم:

$$(\cos a + \cos b)^۲ + (\sin a + \sin b)^۲ =$$
$$= (\cos^۲ a + \sin^۲ a) + (\cos^۲ b + \sin^۲ b) + ۲(\cos a\cos b +$$
$$+ \sin a\sin b) = ۲ - ۲\cos(a-b) = ۲ - ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۲ - ۱ = ۱$$

۱۰۶. اگر $\sin(\alpha+\beta)$ را باز کنیم و همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ نابرابری منتقل کنیم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\sin\alpha(\cos\beta - ۱) + \sin\beta(\cos\alpha - ۱) < ۰$$

α و β زاویه‌هایی حاده و مثبت‌اند، بنابراین $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ مثبت و $\cos\beta - ۱$ و $\cos\alpha - ۱$ مقدارهایی منفی‌اند ($\cos\alpha$ و $\cos\beta$ از ۱ کوچکترند). بنابراین نابرابری همواره برقرار است.

این نابرابری، تنها در حالت $\beta = ۰$ یا $\alpha = ۰$، به برابری تبدیل می‌شود.

۱۰۷. الف) باتوجه به دستورهای

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha},\ \cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

روشن است که، با در دست داشتن مقدار $\tan\alpha$، برای $\cos ۲\alpha,\ \sin ۲\alpha$، تنها یک مقدار به‌دست می‌آید.

ب) باتوجه به دستور $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، با در دست داشتن مقدار $\tan ۲\alpha$، دو مقدار برای $\tan\alpha$ به‌دست می‌آید و باتوجه به دستورهای $\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}$ و $\sin^۲\alpha = \frac{\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$، با در اختیار داشتن مقدار $\tan\alpha$، دو مقدار قرینه برای $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ پیدا می‌شود. بنابراین، وقتی $\tan ۲\alpha$ معلوم باشد، چهار جواب دوبه‌دو قرینه برای $\sin\alpha$ و چهار جواب دوبه‌دو قرینه برای $\cos\alpha$ به‌دست می‌آید.

یادداشت. دایرهٔ مثلثاتی را رسم کنید و کمان AM را به‌عنوان ۲α در نظر بگیرید. روشن است، اگر MO را ادامه دهید تا محیط دایره را در $M_۱$ قطع کند، تانژانت کمان $AM_۱$ با تانژانت کمان AM برابر می‌شود. بنابراین با در دست داشتن مقدار $\tan ۲\alpha$، دو کمان AM و $AM_۱$ به‌دست می‌آید. اکنون آزمایش کنید، برای α، چهار کمان به‌دست می‌آید که سینوس‌ها و کسینوس‌های آن‌ها، دوبه‌دو قرینه‌اند.

۱۰۸. بنا به‌فرض داریم: $\tan\alpha + \tan\beta = a$ و $\tan\alpha \tan\beta = b$. y را محاسبه می‌کنیم:

$$y = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^{۲} +$$
$$+a(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$$
$$+b(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^{۲} =$$
$$= \cos^{۲}\alpha\cos^{۲}\beta[(\tan\alpha + \tan\beta)^{۲} + a(\tan\alpha + \tan\beta) \times$$
$$\times(۱ - \tan\alpha\tan\beta) + b(۱ - \tan\alpha\tan\beta)^{۲}] =$$
$$= \frac{۱}{(۱ + \tan^{۲}\alpha)(۱ + \tan^{۲}\beta)}[a^{۲} - a^{۲}(۱ - b) + b(۱ - b)^{۲}] =$$
$$= \frac{۱}{\tan^{۲}\alpha + \tan^{۲}\beta + \tan^{۲}\alpha\tan^{۲}\beta + ۱}(a^{۲}b + b - ۲b^{۲} + b^{۳}) =$$
$$= \frac{b(a^{۲} + ۱ - ۲b + b^{۲})}{(a^{۲} - ۲b) + b^{۲} + ۱} = b$$

۱۰۹. با استفاده از معادلهٔ اول، معادله دوم را تبدیل می‌کنیم:

$$(\tan^{۲}x + \cot^{۲}x)^{۲} - ۲(\tan x\cot x)^{۲} = b \Rightarrow a^{۲} - b = ۲$$

۱۱۰. شرط $a > ۱$ به‌معنای آن است که مخرج کسر سمت راست مخالف صفر است. مخرج کسر سمت چپ برابری هم، نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا

$$۱ + ۲a\cos\alpha + a^{۲} = (a + \cos\alpha)^{۲} + \sin^{۲}\alpha$$

این عبارت، تنها وقتی می‌تواند برابر صفر شود که $\sin\alpha$ و $a + \cos\alpha$، به‌طور هم‌زمان، برابر صفر باشند. $\sin\alpha$ وقتی برابر صفر است که داشته باشیم $\alpha = k\pi$. برای این‌که $a + \cos\alpha$ به‌ازای $\alpha = k\pi$ برابر صفر شود، باید a برابر ۱ یا ۱− باشد که فرض مساله را نقض می‌کند. دربارهٔ صورت‌های کسرها هم، همین استدلال

درست است. بنابراین تناسب مفروض مساله را می‌توان به هر ترتیبی که مجاز باشد، تبدیل کرد. می‌دانیم، برای تناسب $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{m+p}{n+q} = \frac{m-p}{n-q}$$

تناسب فرضِ مساله، چنین می‌شود:

$$\frac{۲a^۲ + ۲a\cos\beta}{۲a^۲ + ۲a\cos\alpha} = \frac{-۲ - ۲a\cos\beta}{۲ + ۲a\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a + \cos\beta}{a + \cos\alpha} = \frac{-۱ - a\cos\beta}{۱ + a\cos\alpha}$$

یک بار دیگر، از همین‌گونه تبدیلِ تناسب، استفاده می‌کنیم؛ به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\frac{a + \cos\beta - ۱ - a\cos\beta}{a + \cos\alpha + ۱ + a\cos\alpha} = \frac{a + \cos\beta + ۱ + a\cos\beta}{a + \cos\alpha - ۱ - a\cos\alpha};$$

$$\frac{-(a-۱)(۱-\cos\beta)}{(a+۱)(۱+\cos\alpha)} = \frac{(a+۱)(۱+\cos\beta)}{-(a-۱)(۱-\cos\alpha)};$$

$$\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha} \cdot \frac{۱-\cos\beta}{۱+\cos\beta} = \left(\frac{۱+a}{۱-a}\right)^۲;$$

$$\frac{۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\beta}{۲}} = \left(\frac{۱+a}{۱-a}\right)^۲;$$

$$\tan^۲\frac{\alpha}{۲}\tan^۲\frac{\beta}{۲} = \left(\frac{۱+a}{۱-a}\right)^۲;\ \tan\frac{\alpha}{۲}\tan\frac{\beta}{۲} = \pm\frac{۱+a}{۱-a}$$

۱۱. بنا به‌فرض داریم:

$$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = a,\ \sin x\cos\beta - \cos x\sin\beta = b \quad (۱)$$

اگر دو طرف معادلهٔ اول دستگاه (۱) را در $\sin\beta$ و دو طرف معادلهٔ دوم آن را در $\cos\alpha$ ضرب و، سپس، دو معادله را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin x\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha \qquad (۲)$$

به‌همین ترتیب، معادلهٔ اول دستگاه (۱) را $\cos\beta$ و معادلهٔ دوم آن را در $-\sin\alpha$ ضرب و، سپس، دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\cos x\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۲) مقدار $\sin x$ و از معادلهٔ (۳)، مقدار $\cos x$ را محاسبه می‌کنیم و مجموع مجذورهای آن‌ها را برابر ۱ قرار می‌دهیم.

پاسخ. $\cos^۲(\alpha-\beta)=a^۲+b^۲-۲ab\sin(\alpha-\beta)$.

۱۱۲. باید بین معادله‌های این دستگاه، φ را حذف کنیم:

$$\begin{cases}\cos(\alpha-۳\varphi)=m\cos^۳\varphi\\ \sin(\alpha-۳\varphi)=m\sin^۳\varphi\end{cases} \qquad (۱)$$

دو طرف معادلهٔ اول این دستگاه را در $\cos ۳\varphi$ و دو طرف معادلهٔ دوم آن را در $\sin ۳\varphi$ ضرب و، سپس، دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$\cos(\alpha-۳\varphi)\cos ۳\varphi-\sin(\alpha-۳\varphi)\sin ۳\varphi=$$
$$=m(\cos^۳\varphi\cos ۳\varphi-\sin^۳\varphi\sin ۳\varphi)$$

از آن‌جا $\cos\alpha=m(\cos^۳\varphi\cos ۳\varphi-\sin^۳\varphi\sin ۳\varphi)$.

از طرف دیگر می‌دانیم (مساله ۹۴ را ببینید):

$$\cos ۳\varphi=۴\cos^۳\varphi-۳\cos\varphi,\ \sin ۳\varphi=-۴\sin^۳\varphi+۴\sin\varphi$$

این مقدارها را در رابطه‌ای که برای $\cos\alpha$ به‌دست آوردیم قرار می‌دهیم:

$$\cos\alpha=۴m(\sin^۶\varphi+\cos^۶\varphi)-۳m(\sin^۴\varphi+\cos^۴\varphi) \qquad (۲)$$

از مجموع مجذورهای دستگاه (۱) به‌دست می‌آید:

$$\sin^6\varphi + \cos^6\varphi = \frac{1}{m^2} \qquad (3)$$

معادلهٔ (۳) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^3 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2) = \frac{1}{m^2}$$

از آن‌جا $\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{m^2 - 1}{3m^2}$.

اکنون می‌توانیم $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi$ را محاسبه کنیم:

$$\sin^4\varphi + \cos^4\varphi = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi =$$
$$= 1 - \frac{2(m^2 - 1)}{3m^2} = \frac{m^2 + 2}{3m^2}$$

که اگر مقدارهای $\sin^6\varphi + \cos^6\varphi$ و $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi$ را در برابری (۲) قرار دهیم، جواب مساله به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{2 - m^2}{m}$$

۱۱۳. $a = \frac{\pi}{6}$ و بنابراین $\sin a = \frac{1}{2}$ و $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. سینوس و کسینوس b را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos^2 b = \frac{1}{1 + \tan^2 b} = \frac{1}{1 + \frac{1}{15}} = \frac{15}{16},\ \cos b = \frac{1}{4}\sqrt{15};$$

$$\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16},\ \sin b = \frac{1}{4}$$

بنابراین $\sin(a+b)$ قابل محاسبه است:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b =$$
$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۱۵}}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{\sqrt{۱۵}+\sqrt{۳}}{۸}$$

$\sin c$ و $\sin d$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin c = \sqrt{۱-\cos^۲ c} = \frac{۱}{\sqrt{۳}},\ \sin d = \sqrt{۱-\cos^۲ d} = \frac{\sqrt{۶}-۱}{۲\sqrt{۳}};$$
$$\sin(c+d) = \sin c \cos d + \cos c \sin d =$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۶}-۱}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پاسخ. $\frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$

۱۱۴. دستور مربوط به تانژانت مجموع سه کمان را می‌دانیم (مسالهٔ ۹۵ را ببینید):

$$\tan(x+y+z) = \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{۱ - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan z \tan x}$$

چون $\tan k\pi = ۰$، اگر مجموع $x+y+z$ برابر مضربی از π باشد، عبارت صورت کسر سمت راست برابری، مساوی صفر می‌شود:

$$x+y+z = k\pi \Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

مثلاً، چون مجموع سه زاویهٔ مثلث، برابر ۱۸۰ درجه است، بنابراین در هر مثلث، مجموع تانژانت‌های سه زاویه، برابر است با حاصل‌ضرب آن‌ها.

در مساله ۱۱۴، اگر فرض کنیم:

$$x = a - b + \frac{\pi}{۱۰},\ y = b - c + \frac{\pi}{۱۵},\ z = c - a + \frac{۵\pi}{۶}$$

به‌دست می‌آید $x+y+z=\pi$. مجموع سه کمان $a-b+\frac{\pi}{10}$ و $b-c+\frac{\pi}{15}$ و $c-a+\frac{5\pi}{6}$ برابر مضربی از π است و، بنابراین، مجموع تانژانت‌های این سه کمان، با حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است.

۱۱۵. $t=\tan\frac{x}{2}$ می‌گیریم و برابری فرض را برحسب t منظم می‌کنیم. داریم:

$$\cos a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-\sin a\cos b\cdot\frac{2t}{1+t^2}=\cos b;$$
$$(1+t^2)\cos b-(1-t^2)\cos a+2t\sin a\cos b=0;$$
$$(\cos a+\cos b)t^2+2\sin a\cos b\cdot t-(\cos a-\cos b)=0;$$

مبین این معادلهٔ درجه دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta'=\sin^2 a\cos^2 b+\cos^2 a-\cos^2 b=\cos^2 a-\cos^2 b(1-\sin^2 a)=$$
$$=\cos^2 a-\cos^2 a\cos^2 b=\cos^2 a(1-\cos^2 b)=\cos^2 a\sin^2 b$$

و بنابراین ریشه‌های معادله چنین‌اند:

$$t=\frac{-\sin a\cos b\pm\cos a\sin b}{\cos a+\cos b}$$

پاسخ. $t=\tan\frac{x}{2}$: $t_1=\frac{\sin(b-a)}{\cos a+\cos b}$ و $t_2=\frac{-\sin(a+b)}{\cos a+\cos b}$. این جواب‌ها، باشرط $\cos a+\cos b\neq 0$ به‌دست می‌آیند. در حالت $\cos a+\cos b=0$ داریم: $\cos b=-\cos a$ و $t=-\frac{1}{\sin a}$.

۱۱۶. اگر $t=\tan\frac{x}{2}$ فرض کنیم، چون $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$، پس $t>0$ و نابرابری به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{t}>1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\Rightarrow\frac{1}{t}>\frac{2}{1+t^2}\Rightarrow\frac{(t-1)^2}{t(1+t^2)}>0$$

نابرابری به‌ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ به برابری تبدیل می‌شود و به‌ازای سایر مقدارهای x در بازهٔ $(\circ, \pi)$ برقرار است.

.۱۱۷ $y = \tan\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right)$ می‌گیریم. پس

$$y = \frac{۱ - \tan\frac{x}{۲}}{۱ + \tan\frac{x}{۲}} \Rightarrow \tan\frac{x}{۲} = \frac{۱ - y}{۱ + y}$$

بنابراین

$$\tan x = a = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱ - \tan^{۲}\frac{x}{۲}} = \frac{۱ - y^{۲}}{۲y};$$

$$y^{۲} + ۲ay - ۱ = \circ \Rightarrow y = -a \pm \sqrt{۱ + a^{۲}}$$

برای حالت‌های مختلف، کافی است انتهای کمان x را در یک دور دایرهٔ مثلثاتی در نظر بگیریم. درضمن $x \neq \frac{\pi}{۲}$ و $x \neq \frac{۳\pi}{۲}$ تا $\tan x$ معنی داشته باشد و $x \neq \pi$ تا $\tan\frac{x}{۲}$ معنای خود را از دست ندهد.

۱) $\circ < x < \frac{\pi}{۲}$، آن‌وقت $\circ < \frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲} < \frac{\pi}{۴}$، بنابراین

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right) > \circ, \; y = -a + \sqrt{۱ + a^{۲}};$$

۲) اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$، آن‌وقت $-\frac{\pi}{۴} < \frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲} < \circ$، درنتیجه

$$y < \circ, \; y = -a - \sqrt{۱ + a^{۲}};$$

۳) اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$، آن‌وقت $-\frac{\pi}{۲} < \frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲} < -\frac{\pi}{۴}$ و درنتیجه

$$y < \circ, \; y = -a - \sqrt{۱ + a^{۲}};$$

۴) اگر $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$، آن‌وقت $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{2}$ و درنتیجه

$$y > 0,\ y = -a + \sqrt{1 + a^2}$$

۱۱۸. الف) چون $0 \leq a \leq 1$ و $0 \leq b \leq 1$، می‌توان فرض کرد:

$$a = \sin^2 \alpha,\ b = \sin^2 \beta$$

در این صورت، نابرابری چنین می‌شود:

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \leq \sin \alpha + \sin \beta$$

که اگر همهٔ جمله‌ها را به سمت راست نابرابری منتقل کنیم:

$$\sin \alpha(1 - \cos \beta) + \sin \beta(1 - \cos \alpha) \geq 0$$

که درستی آن روشن است ($\sin \alpha$ و $\sin \beta$ مثبت‌اند و $\cos \alpha$ و $\cos \beta$ از ۱ بزرگتر نیستند). خودتان مشخص کنید؛ در چه حالت‌هایی، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود.

ب) $x = \tan \alpha$ و $y = \tan \beta$ می‌گیریم. درضمن باتوجه به شرط مساله $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ و $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{6}$. نابرابری به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \leq 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) \leq 2 + \sqrt{3}$$

باتوجه به شرط‌هایی که برای α و β داریم، به‌دست می‌آید:

$$0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{5\pi}{12} \Rightarrow 0 \leq \tan(\alpha + \beta) \leq 2 + \sqrt{3}$$

۱۱۹. می‌دانیم $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (مسالهٔ ۹۶ را ببینید). برای محاسبهٔ $\cos 36^\circ$، از دستور $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

۱۲۰. درستی این نابرابری روشن است:

$$۶\sin x \geq -۷ - \cos ۲x \Rightarrow \frac{۶\sin x}{۷ + \cos ۲x} \geq -۱$$

بنابراین، باتوجه به معادلهٔ اول باید داشته باشیم:

$$a = \frac{۶\sin x}{۷ + \cos ۲x} \geq -۱$$

در معادلهٔ دوم، به‌جای $\sin ۳x$، مقدارش را برحسب $\sin x$ قرار می‌دهیم:

$$۳a\sin x - ۸ = a(۴ + ۳\sin x - ۴\sin^۳ x)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $\sin^۳ x = \frac{a+۲}{a}$. سینوس از ۱- کمتر و از ۱+ بیشتر نیست. پس

$$-۱ \leq \frac{a+۲}{a} \leq ۱ \Rightarrow \left(\frac{a+۲}{a}\right)^۲ \leq ۱ \Rightarrow \frac{۴(a+۱)}{a^۲} \leq ۰ \Rightarrow a \leq -۱$$

معادلهٔ اول وقتی جواب دارد که داشته باشیم $a \geq -۱$؛ معادلهٔ دوم وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $a \leq -۱$. بنابراین دو معادله وقتی می‌توانند جواب مشترک داشته باشند که داشته باشیم $a = -۱$. آیا به‌ازای این مقدار a، معادله‌ها ریشهٔ مشترک دارند؟ آزمایش می‌کنیم. به‌ازای $a = -۱$، معادله اول به این صورت درمی‌آید:

$$۶\sin x + \cos ۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow ۶\sin x +$$
$$+(۱ - ۲\sin^۲ x) + ۷ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x - ۳\sin x = ۴$$

و این معادله، تنها وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $\sin x = -۱$.

معادلهٔ دوم به‌ازای $a = -۱$ به‌صورت $\sin^۳ x = -۱$ درمی‌آید؛ یعنی $\sin x = -۱$.

پاسخ. دو معادلهٔ به‌ازای $a = -۱$، دارای ریشه‌های مشترک هستند:

$$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

۱۲۱. جملهٔ $\cos^۲\alpha\sin^۲\beta$ را یک‌بار از $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta$ کم و یک‌بار به آن اضافه می‌کنیم.

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta - \cos^۲\alpha\sin^۲\beta + \cos^۲\alpha\sin^۲\beta =$$
$$= (\cos^۲\alpha - \cos^۲\alpha\sin^۲\beta) + (۱ - \sin^۲\beta) + \cos^۲\alpha\sin^۲\beta$$
$$= \cos^۲\alpha(۱ - \sin^۲\beta) - \sin^۲\beta(۱ - \cos^۲\alpha) + ۱ =$$
$$= \cos^۲\alpha\cos^۲\beta - \sin^۲\alpha\sin^۲\beta + ۱ =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + ۱$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + ۱$$

این مقدار، باید برابر m باشد:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + ۱ = m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = m - ۱$$

۱۲۲. با تجزیهٔ $\sin^۳ x + \cos^۳ x$، معادله به این صورت درمی‌آید:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^۲ x - \sin x\cos x + \cos^۲ x) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin ۲x;$$
$$(\sin x + \cos x)\left(۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin ۲x$$

دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$(۱ + \sin ۲x)(۴ + \sin^۲ ۲x - ۴\sin ۲x) = ۲\sin^۲ ۲x$$

که سرانجام به این صورت درمی‌آید:

$$\sin^۳ ۲x - ۵\sin^۲ ۲x + ۴ = ۰$$

$\sin ۲x = ۱$ در معادله صدق می‌کند، بنابراین عبارت سمت چپ برابری بر $\sin ۲x - ۱$ بخش‌پذیر است:

$$(\sin ۲x - ۱)(\sin^۲ ۲x - ۴\sin ۲x - ۴) = ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sin ۲x = ۱,\ \sin ۲x = ۲(۱ - \sqrt{۲})$$

(جواب $\sin ۲x = ۲(۱ + \sqrt{۲})$ قابل‌قبول نیست، زیرا سینوس نمی‌تواند از ۱ بزرگتر باشد).

پاسخ. $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$، $x = k\pi - \frac{\alpha}{۲}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲}$؛ $\alpha_{۱}$ را زاویهٔ حاده مثبتی گرفته‌ایم که برای آن داشته باشیم $\sin ۲\alpha = ۲(\sqrt{۲} - ۱)$.

۱۲۳. *راه‌حل اول.* بنابه فرض مساله داریم:

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = ۲\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha(۲ - \cos\beta)$$

$\cos\alpha$ مثبت و کوچکتر از ۱ است، پس $\cos\alpha\sin\beta$ کوچکتر از $\sin\beta$ است و درنتیجه

$$\sin\alpha(۲ - \cos\beta) < \sin\beta$$

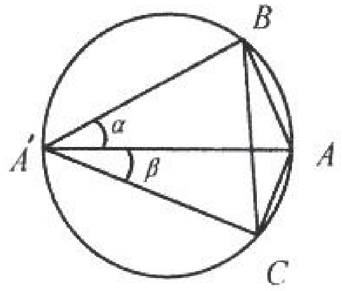
از طرف دیگر، چون $۱ > \cos\beta > ۰$، پس $۲ - \cos\beta > ۱$ بنابراین

$$\sin\alpha < \sin\alpha(۲ - \cos\beta) < \sin\beta$$

α و β زاویه‌هایی مثبت و حاده‌اند. وقتی $\sin\alpha < \sin\beta$، آن‌وقت $\alpha < \beta$.

راه‌حل دوم. دایره‌ای با قطر به طول ۲ واحد در نظر می‌گیریم (دایرهٔ مثلثاتی؛ شکل ۴۹). قطر $A'A$ را رسم و کمان‌های $\widehat{AB} = ۲\alpha$ و $\widehat{AC} = ۲\beta$ را در دو طرف نقطهٔ A جدا می‌کنیم. داریم:

$$\widehat{AA'B} = \alpha,\ \widehat{AA'C} = \beta$$



شکل ۴۹

و روشن است که در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ و $A'AC$ داریم:

$$\sin\alpha = \frac{۱}{۲}|AB|,\ \sin\beta = \frac{۱}{۲}|AC|,$$

می‌دانیم، سینوس یک کمان حاده برابر است با نصف وتر کمان دو برابر آن، پس

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{۱}{۲}|BC|$$

باتوجه به مثلث ABC:

$$|AC| > |BC| - |AB| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\beta > \sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha = ۲\sin\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha$$

$\sin\beta > \sin\alpha$، بنابراین $\beta > \alpha$.

۱۲۴. چون $۱ - \cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$، $\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$ و $\sin\frac{\alpha}{۲} > ۰$، بعد از ساده کردن دو طرف نابرابری به $۲\sin\frac{\alpha}{۲}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{۲} < ۱ + \left(\cos\frac{\alpha}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \qquad (*)$$

چون $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\frac{\alpha}{۲}} = \frac{۲}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\cos\frac{\alpha}{۲} \ge \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، بنابراین نابرابری $(*)$ و، درنتیجه، نابرابری اصلی درست است.

۱۲۵. برای مجموع دو جملهٔ اول داریم:

$$k! + k \cdot k! = k!(k+۱) = (k+۱)!$$

که اگر آن را با جملهٔ سوم در نظر بگیریم:

$$(k+۱)! + (k+۱)(k+۱)! =$$
$$= (k+۱)!(k+۲) = (k+۲)!$$

اگر به‌همین ترتیب جلو برویم، سرانجام به این مجموع می‌رسیم:

$$(n-۱)! + (n-۱)(n-۱)! = (n-۱)! \cdot n = n!$$

پاسخ. $A = n!$.

۱۲۶. جملهٔ عمومی مجموع، یعنی $\frac{n+۲}{n! + (n+۱)! + (n+۲)!}$ را ساده می‌کنیم (اگر در این جملهٔ عمومی، به‌ترتیب عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n را قرار دهیم، جمله‌های پشت‌سرهم مجموع به‌دست می‌آید):

$$\frac{n+۲}{n! + (n+۱)! + (n+۲)!} = \frac{n+۲}{n![۱ + (n+۱) + (n+۱)(n+۲)]} =$$
$$= \frac{n+۲}{n!(n^۲ + ۴n + ۴)} = \frac{n+۲}{n!(n+۲)^۲} = \frac{۱}{n!(n+۲)} =$$
$$= \frac{n+۱}{(n+۲)!} = \frac{۱}{(n+۱)!} - \frac{۱}{(n+۲)!}$$

بنابراین، مجموع B به‌این صورت درمی‌آید:

$$B = \left(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!}\right) + \left(\frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{۴!}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{۱}{(n+۱)!} - \frac{۱}{(n+۲)!}\right) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{(n+۲)!}$$

۱۲۷. بین عددهای از ۱ تا ۱۰، ۲ عدد مضرب ۵ وجود دارد؛ در همه فاصله‌های ۱۰ عدد پشت‌سرهم بعدی هم دو عدد مضرب ۵ وجود دارد، به‌جز در فاصله‌های از ۲۱ تا ۳۰، از ۴۱ تا ۵۰، از ۷۱ تا ۸۰ و غیره که در آن‌ها، یکی از عددهای بخش‌پذیر بر ۵، درضمن بر 5^2 بخش‌پذیر است (۲۵، ۵۰، ۷۵ و غیره).

$n!$، حاصل‌ضرب n عدد پشت‌سرهم از ۱ تا n است. چون m بر ۵ بخش‌پذیر نیست، باید عدد طبیعی n را طوری انتخاب کنیم که، حاصل‌ضرب عددهای از ۱ تا n، بر 5^{19} بخش‌پذیر و بر 5^{20} بخش‌ناپذیر باشد. اگر $n = 80$ بگیریم، در حاصل‌ضرب عددهای از ۱ تا ۸۰، به تعداد $16 = 2 \times 8$ عدد مضرب ۵ وجود دارد، ولی سه‌تا از این عددها مضرب 5^2 هستند. بنابراین $80!$ بر 5^{19} بخش‌پذیر و بر 5^{20} بخش‌ناپذیر است. روشن است، اگر n را برابر یکی از عددهای ۸۱، ۸۲، ۸۳ یا ۸۴ بگیریم، باز هم به همین نتیجه می‌رسیم.

پاسخ. n می‌تواند برابر یکی از عددهای ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳ یا ۸۴ باشد.

۱۲۸. الف) مساله را در ذهن خود، اندکی تغییر می‌دهیم: با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، چند عدد می‌توان ساخت که در آن‌ها رقم تکراری وجود نداشته باشد و، درضمن، رقم سمت چپ هر عدد برابر ۳ باشد.

وقتی رقم سمت چپ عدد ۳ باشد، در سمت راست آن، ۴ رقم وجود دارد که به p_4 طریق می‌توان آن‌ها را نوشت:

$$p_4 = 4! = 24$$

تعداد همهٔ عددهای پنج‌رقمی برابر است با

$$p_5 = 5! = 120$$

بنابراین، تعداد عددهای پنج‌رقمی که با ۳ آغاز نمی‌شوند، برابر است با

$$120 - 24 = 96$$

ب) پاسخ. ۱۱۴.

۱۲۹. الف) اگر تعداد عضوهای مجموعه را n بگیریم، باید داشته باشیم $n! > ۱۰۰۰$. از آن‌جا که $۶! = ۷۲۰ < ۱۰۰۰$، بنابراین مجموعه باید دست‌کم ۷ عضو داشته باشد.

ب) پاسخ. مجموعه نمی‌تواند بیش از ۵ عضو داشته باشد.

۱۳۰. به دو نکته توجه کنیم: ۱) چون هر زوج باید روبه‌روی هم باشند، یک زن و شوهر نمی‌توانند در یک سمت میز رستوران بنشینند؛ ۲) وقتی آرایش یک سمت میز معلوم باشد، به خودی خود، آرایش سمت دیگر میز هم مشخص می‌شود.

به این ترتیب برای یک سمت میز، ۴ حالت وجود دارد: ۳ مرد، ۳ زن، ۲ مرد و یک زن، ۲ زن و ۱ مرد. برای هر حالت به تعداد !۳ یعنی ۶ طریقِ نشستن وجود دارد و برای ۴ حالت ۴×۶، یعنی ۲۴ طریق. ولی هریک از این ۲۴ وضع نشستن را می‌توان به سمت دیگر میز منتقل کرد.

پاسخ. به ۴۸ طریق مختلف.

۱۳۱. با پنج رقم می‌توان به تعداد !۵، یعنی ۱۲۰ عدد نوشت. ولی در این‌جا، رقم ۰ نمی‌تواند در سمت چپ عدد باشد، زیرا در این صورت عددی چهاررقمی به‌دست می‌آید. وقتی ۰ را رقم سمت چپ عدد فرض کنیم، چهار رقم سمت راست آن را، به تعداد !۴، یعنی ۲۴ طریق می‌توان نوشت. بنابراین، به تعداد $۱۲۰ - ۲۴$، یعنی ۹۶ عدد پنج‌رقمی خواهیم داشت.

۱۳۲. با استفاده از دستور $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ داریم:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!} = n!;$$

$$A_n^{n-۱} = \frac{n!}{[n-(n-۱)]!} = \frac{n!}{۱!} = n!$$

۱۳۳. مساله، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$\frac{n!}{(n-۵)!} = ۱۸ \times \frac{(n-۲)!}{(n-۶)!}$$

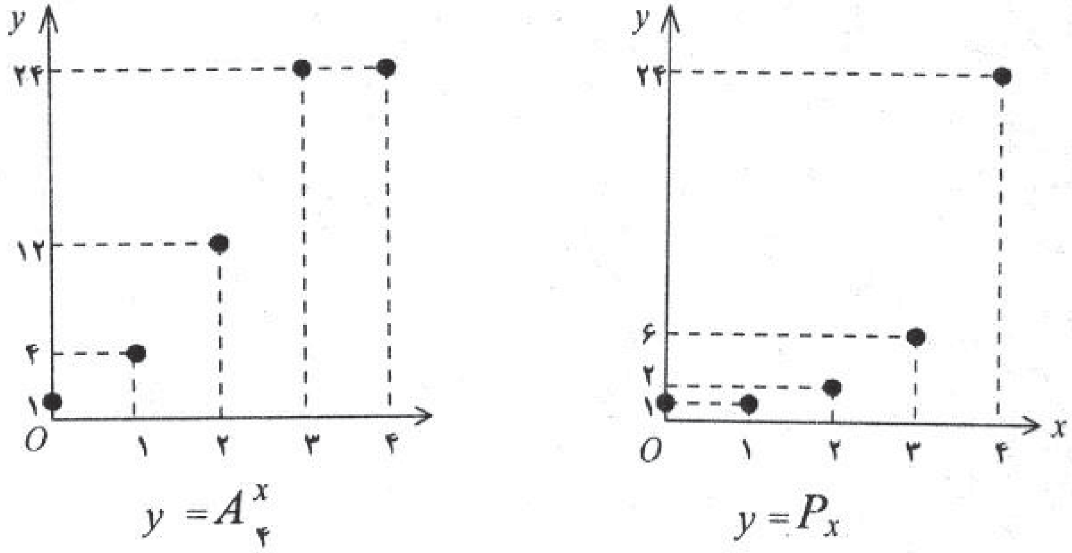
دو طرف را به $\frac{(n-۲)!}{(n-۶)!}$ ساده می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

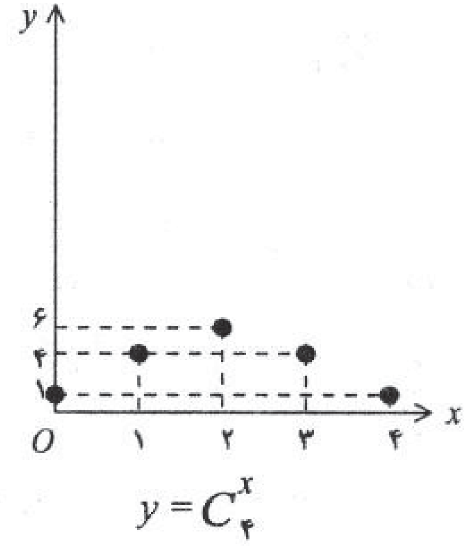
$$\frac{n(n-۱)}{n-۵} = ۱۸ \Rightarrow n^۲ - ۱۹n + ۹۰ = ۰$$

که دو جواب برای n به‌دست می‌آید: $n_۱ = ۹$ و $n_۲ = ۱۰$. هر دو جواب قابل قبول‌اند (آزمایش کنید!).

۱۳۴. در نمودارها، واحد محور $y'y$ را کوچکتر از واحد محور $x'x$ گرفته‌ایم. در هر سه حالت، نمودار شامل نقطه‌هایی جدا از هم (نقطه‌های منفرد) است. هیچ نقطه‌ای از نمودارها، روی محور $x'x$ نیست. ولی در هر سه نمودار، نقطهٔ $(۰, ۱)$ روی محور $y'y$ است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = C_۴^x$، دارای محور تقارن است (خط راست $x = ۲$. متقارن بودن این نمودار، ناشی از برابری $C_n^m = C_n^{n-m}$ است). تابع $C_۴^x$، به‌ازای $x = ۲$ به بیشترین مقدار خود برابر ۶، و به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۴$، به کمترین مقدار خود برابر ۱ می‌رسد. این سه نمودار، در شکل ۵۰ داده شده است.

۱۳۵. ۱) C_n^m، یعنی همهٔ ترکیب‌های mتایی از بین nچیز. فرض کنید، این n چیز $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n باشند. ترکیب‌های mتایی از این n چیز را به دو گروه بخش می‌کنیم: بخش اول، آن‌هایی که شامل $a_۱$ هستند. درواقع، در این گروه، ترکیب‌هایی قرار دارند که، اگر از آن‌ها $a_۱$ را کنار بگذاریم، به ترکیب‌های $(m-۱)$تایی از $(n-۱)$ عنصر $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n می‌رسیم، یعنی تعداد آن‌ها برابر است با $C_{n-۱}^{m-۱}$. در بخش دوم، گروهی از ترکیب‌های mتایی قرار دارند که از بین $(n-۱)$ عنصر $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n انتخاب شده‌اند، یعنی تعداد آن‌ها برابر





شکل ۵۰

است با $C_{n-۱}^{m}$. درنتیجه، باید داشته باشیم:

$$C_n^m = C_{n-۱}^{m-۱} + C_{n-۱}^{m}$$

به‌یاری محاسبه هم می‌توانستیم درستی این برابری را ثابت کنیم. سمت راست برابری را محاسبه می‌کنیم:

$$C_{n-۱}^{m-۱} + C_{n-۱}^{m} = \frac{(n-۱)!}{(m-۱)!(n-m)!} + \frac{(n-۱)!}{m!(n-m-۱)!} =$$
$$= \frac{(n-۱)!m + (n-۱)!(m-n)}{m!(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!n}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$

۲) مجموعه‌ای را در نظر بگیرید که دارای n عضو است. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه، برابر است با ۲^n (مثلاً، حل مسالهٔ ۳۸ از جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» را در صفحه ۲۴۱ ببینید).

از طرف دیگر، می‌توان تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه را، به این ترتیب محاسبه کرد:

زیرمجموعهٔ تهی که می‌توان تعداد آن را با $C_n^۰$ نشان داد، زیرا $C_n^۰ = ۱$؛

زیرمجموعه‌های یک‌عضوی که می‌توان تعداد آن‌ها را با $C_n^۱$ نشان داد، زیرا $C_n^۱ = n$؛

زیرمجموعه‌هایی که، هرکدام، شامل دو عضوند: $C_n^۲$؛

زیرمجموعه‌های سه‌عضوی: $C_n^۳$؛

....

و سرانجام، زیرمجموعه‌های nعضوی: C_n^n.

به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$C_n^۰ + C_n^۱ + C_n^۲ + \ldots + C_n^n = ۲^n$$

۱۳۶. سه کتاب را از بین ده کتاب، می‌توان به $C_{۱۰}^۳$ طریق مختلف جدا کرد. انتخاب پنج مجله از بین هشت مجلهٔ موجود، به $C_۸^۵$ طریق ممکن است. از آن‌جا که می‌توان، هر انتخاب کتاب را با هر انتخاب مجله در نظر گرفت، تعداد روش‌های مختلف آماده کردن امانت پستی، برابر است با

$$C_{۱۰}^۳ \cdot C_۸^۵ = \frac{۱۰!}{۳!۷!} \times \frac{۸!}{۵!۳!} = ۶۷۲۰$$

۱۳۷. اگر به دستور $C_n^m = C_n^{n-m}$ توجه کنیم، داریم:

$$C_x^{x-۱} = C_x^۱,\ C_x^{x-۲} = C_x^۲,\ \ldots,\ C_x^{x-۱۰} = C_x^{۱۰}$$

بنابراین، معادلهٔ ما، به این صورت درمی‌آید:

$$C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + \ldots + C_x^{10} = 1023$$

که در آن، $x \geq 10$، عددی است درست و مثبت. می‌دانیم $C_x^0 = 1$. به سمت چپ معادله C_x^0 و به سمت راست آن، ۱ را اضافه می‌کنیم:

$$C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + \ldots + C_x^{10} = 1024 = 2^{10}$$

مقدار سمت چپ معادله، برابر است با 2^x (برابری ۲ را در مسالهٔ ۱۳۵ ببینید). بنابراین

$$2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10$$

۱۳۸. یک ردیف چهارتایی از گلوله‌ها را، به سه گونه می‌توان درست کرد:

۱) در هر ردیف چهارتایی، ۱ گلولهٔ سیاه وجود داشته باشد؛

۲) در هر ردیف چهارتایی، ۲ گلولهٔ سیاه قرار گیرد؛

۳) در هر ردیف چهارتایی، ۳ گلولهٔ سیاه داشته باشیم.

در گونه ۱)، در هر ردیف، همهٔ گلوله‌ها با هم فرق دارند. بنابراین، تعداد این‌گونه ردیف‌ها، برابر با p_4 (تعداد تبدیل‌ها یا جای‌گشت‌های ۴ گلوله)، یعنی ۲۴؛

تعداد ردیف‌های گونهٔ ۲) را محاسبه می‌کنیم. برای به‌دست آوردن چنین ردیفی، در آغاز باید دوجا را برای گلوله‌های سیاه انتخاب کرد که به C_4^2، یعنی به ۶ طریق ممکن است. سپس، باید دو جای باقی‌مانده را با ۲ گلوله از ۳ گلولهٔ دیگر پر کرد و، این کار را، به A_3^2، یعنی به ۶ طریق می‌توان انجام داد. به این ترتیب، تعداد همهٔ ردیف‌های گونهٔ ۲)، برابر 6×6، یعنی ۳۶ می‌شود.

به همین ترتیب، تعداد ردیف‌های گونهٔ ۳) را می‌توان به‌دست آورد. این تعداد برابر است با

$$C_4^3 \cdot A_3^1 = 4 \times 3 = 12$$

پاسخ. ۷۲ ردیف متفاوت.

۱۳۹. دو حالت در نظر می‌گیریم: ۱) وقتی رقم سمت چپ عدد فرد باشد؛ ۲) وقتی رقم سمت چپ عدد، زوج باشد.

در حالت ۱)، چون ۵ رقم فرد وجود دارد (۱، ۳، ۵، ۷ و ۹)، بنابراین به ۵ طریق می‌توان رقم سمت چپ را برگزید. رقم فرد دوم را باید در یکی از سه مرتبهٔ دیگر قرار داد. ۵ عدد فرد وجود دارد و برای هرکدام از آنها، ۳ انتخاب، پس روی هم برای رقم فرد دوم، ۱۵ امکان گزینش وجود دارد. هریک از مرتبه‌های باقی‌مانده را به ۵ طریق می‌توان با یک رقم زوج پر کرد (تعداد رقم‌های زوج برابر ۵ است: ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸). بنابراین، تعداد همهٔ عددهای چهاررقمی که از سمت چپ با رقم فرد آغاز شوند و، روی‌هم، دو رقم فرد و دو رقم زوج داشته باشند، برابر است با

$$۵ \times ۱۵ \times ۵ \times ۵ = ۳ \times ۵^{۴}$$

به همین ترتیب می‌توان تعداد عددهای چهاررقمی حالت ۲) را محاسبه کرد. تنها تفاوتی که بین این حالت و حالت قبل وجود دارد، این است که رقم سمت چپ نمی‌تواند برابر صفر باشد، یعنی رقم سمت چپ را تنها به ۴ طریق می‌توان برگزید. به این ترتیب، تعداد عددهای چهاررقمی که از سمت چپ با رقم زوج آغاز شوند و، درضمن، شامل دو رقم زوج و دو رقم فرد باشند، برابر است با

$$۴ \times ۱۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲ \times ۵^{۳}$$

درنتیجه، تعداد همهٔ عددهای دورقمی که دو رقم زوج و دو رقم فرد داشته باشند، برابر است با

$$۳ \times ۵^{۴} + ۱۲ \times ۵^{۳} = ۳ \times ۵^{۳}(۵ + ۴) = ۲۷ \times ۵^{۳} = ۳۳۷۵$$

۱۴۰. اگر به نکتهٔ ساده‌ای توجه کنیم، حل این مساله بسیار ساده می‌شود، به نحوی که هیچ نیازی به رابطه یا دستور پیدا نمی‌کنیم: اگر مجموع رقم‌های عددی

فرد باشد، با اضافه کردن یک واحد، مجموع رقم‌های آن زوج می‌شود؛ همچنین، با اضافه کردن یک واحد به عددی که مجموع رقم‌های آن زوج است، عددی با مجموع رقم‌های فرد به‌دست می‌آید. یعنی، مجموع رقم‌های عددها، یک درمیان زوج و فرد است. روی‌هم ۹۰۰۰۰۰ عدد شش‌رقمی داریم (از ۱۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹)، بنابراین تعداد عددهای شش‌رقمی که مجموع رقم‌های آن‌ها فرد است، برابر است با

$$۹۰۰۰۰۰ : ۲ = ۴۵۰۰۰۰$$

۱۴۱. اگر p مهرهٔ سفید را در یک ردیف بچینیم، $(p-۱)$ محل در بین آن‌ها و ۲ محل در دو سمت آن‌ها، یعنی روی‌هم $(p+۱)$ محل برای جا دادن q مهرهٔ سیاه وجود دارد. و روشن است که، این کار را، به $C_{p+۱}^{q}$ طریق می‌توان انجام داد.

۱۴۲. هر نقطهٔ برخورد دو قطر، متناظر با ۴ راس ۱۰ضلعی است. بنابراین، تعداد نقطه‌های برخورد قطرها، برابر است با تعداد انتخاب‌های چهار راس از بین ده راس، یعنی

$$C_{۱۰}^{۴} = \frac{۱۰!}{۴!۶!} = ۲۱۰$$

پاسخ. اگر در ده‌ضلعی کوژ، هیچ سه قطری از یک نقطه نگذرند، قطرها در ۲۱۰ نقطهٔ متمایز، یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۴۳. روی هر ضلع مربع باید ۴ نقطه برگزید تا هر ضلع، به ۵ بخش تقسیم شود. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) وقتی که سه راس مثلث، روی سه ضلع جداگانهٔ مربع باشند؛

۲) وقتی که دو راس مثلث، روی یک ضلع و راس سوم روی ضلع دیگری از مربع باشد.

در حالت ۱)، در آغاز باید سه ضلعی را برگزید که راس‌های مثلث روی آن‌ها قرار دارند. این انتخاب را به $C_{۴}^{۳} = ۴$ طریق می‌توان انجام داد. بعد باید یک نقطه از چهار نقطهٔ تقسیم را روی هر ضلع برگزید. چون انتخاب هر راس مستقل است،

یعنی به انتخاب دو راس دیگر بستگی ندارد، روی هم به تعداد $۴^۳$ طریق مختلف می‌توان راس‌ها را روی سه ضلع انتخابی برگزید. به این ترتیب، در حالت ۱)، به تعداد $۴^۳ \times ۴$، یعنی $۴^۴$ مثلث مختلف می‌توان ساخت.

در حالت ۲)، در آغاز باید ضلعی را برگزید که دو راس مثلث روی آن قرار دارد (۴ امکان). در مرحلهٔ دوم، باید روی ضلعی که برگزیده‌ایم، ۲ نقطه از ۴ نقطه را در نظر بگیریم ($C_۴^۲$ امکان). در مرحلهٔ سوم، باید یک ضلع دیگر را برای راس سوم انتخاب کنیم (۳ امکان) و سرانجام، در مرحلهٔ چهارم، باید یک نقطه از ۴ نقطهٔ روی این ضلع را در نظر بگیریم (۴ امکان). هیچ‌کدام از این انتخاب‌ها به دیگری بستگی ندارد، یعنی انتخاب‌ها مستقل از یکدیگرند. به این ترتیب، در حالت ۲)، روی‌هم $۴۸C_۴^۲$ انتخاب مختلف به‌دست می‌آید.

پاسخ. با نقطه‌های تقسیم واقع بر ضلع‌های مربع، می‌توان روی‌هم، به تعداد

$$۴^۴ + ۴۸C_۴^۲ = ۵۴۴$$

مثلث مختلف ساخت.

۱۴۴. الف) *پاسخ.* $C_۸^۳ = ۵۶$.

ب) دو زن را می‌توان به $C_۴^۲$ طریق و یک مرد را به ۴ طریق برگزید. بنابراین، در این حالت، $۴ \times C_۴^۲ = ۲۴$ راه برای انتخاب گروه وجود دارد.

ج) در گروه باید نمایندهٔ سه خانواده از چهار خانواده وجود داشته باشد ($C_۴^۳$ امکان). در هریک از این امکان‌ها، می‌توان یا زن و یا شوهر را انتخاب کرد (۲ امکان).

پاسخ. $C_۴^۳ \times ۲^۳ = ۳۲$.

۱۴۵. شش نمونه را از بین ده نمونه، به $C_{۱۰}^۶$ طریق می‌توان انتخاب کرد:

$$C_{۱۰}^۶ = \frac{۱۰!}{۶!۴!} = ۲۱۰$$

این، تعداد انتخاب‌های ممکن است. از بین ۷ نمونهٔ سالم کالا، به C_7^4 طریق می‌توان ۴ نمونهٔ سالم، و از بین ۳ نمونهٔ ناقص، به C_3^2 طریق می‌توان ۲ نمونهٔ ناقص انتخاب کرد. هریک از انتخاب‌های نمونه‌های ناقص، می‌تواند همراه با یکی از انتخاب‌های نمونه‌های سالم باشد. بنابراین، به $C_7^4 \times C_3^2$ طریق می‌توان ۶ نمونهٔ کالا انتخاب کرد که دو نمونهٔ آن ناقص باشد.

$$C_7^4 \times C_3^2 = 35 \times 3 = 105$$

این، تعداد احتمال‌های مساعد است. بنابراین، احتمال مطلوب، برابر است با

$$105 : 210 = \frac{1}{2} (\text{۵۰درصد})$$

۱۴۶. بین ۳۶ مهره، به C_{36}^3 طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد. روی ۴ مهره از این ۳۶ مهره، عدد ۱ نوشته شده است که به C_4^1 طریق می‌توان یکی از آن‌ها را انتخاب کرد. همچنین، بین ۳۲ مهرهٔ باقی‌ماندهٔ، C_{32}^2 طریق برای انتخاب دو مهرهٔ دیگر در نظر گرفته شود. بنابراین، $C_4^1 \times C_{32}^2$ حالتِ مساعد، در برابر C_{36}^3 حالتِ ممکن وجود دارد و احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{C_4^1 \times C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{4 \times \dfrac{32 \times 31}{2}}{\dfrac{36 \times 35 \times 34}{2 \times 3}} = \frac{496}{1785} = 0/2778$$

پاسخ. به‌تقریب ۲۸ درصد.

۱۴۷. الف) تعداد پیش‌آمدهای ممکن، برابر است با تعداد روش‌هایی که می‌توان ۶ گلوله را از بین ۱۰ گلوله انتخاب کرد، یعنی C_{10}^6.

پیش‌آمد مساعد، وقتی رخ می‌دهد که، یک گلوله از این شش گلولهٔ انتخابی، با شمارهٔ ۱ باشد و، بنابراین، پنج گلوله دیگر، باید شماره‌های دیگر داشته باشند. تعداد این پیش‌آمدهای مساعد برابر است با تعداد ترکیب‌های پنج‌تایی از بین ۹ چیز، یعنی C_9^5.

بنابراین، برای این‌که، یکی از این شش گلوله، دارای شمارهٔ ۱ باشد، برابر است با

$$p = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} : \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 0/6$$

ب) در این حالت، پیش‌آمدی مساعد است که، در بین ۶ گلولهٔ انتخابی، ۲ گلوله با شماره‌های ۱ و ۲ باشند؛ یعنی ۴ گلوله از این ۶ گلوله شماره‌های دیگری دارند. بنابراین تعداد پیش‌آمدهای مساعد برابر است با C_8^4 و احتمال مطلوب چنین است:

$$p = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{3}$$

•

پاسخ. وقتی ۶ گلوله از ۱۰ گلوله را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال وجود عدد ۱ در بین آن‌ها ۶۰درصد و احتمال وجود عددهای ۱ و ۲، به‌تقریب ۳۳ درصد است.

۱۴۸. الف) تعداد پیش‌آمدهای ممکنِ ۲ گلوله از ۵ گلوله برابر است با C_5^2. می‌خواهیم بین ۲ گلولهٔ انتخابی، یکی قرمز و دیگری سفید باشد. از ۲ گلولهٔ سفید به تعداد C_2^1 حالت می‌تواند یک گلولهٔ سفید بیاید و از بین ۳ گلولهٔ قرمز، در C_3^1 حالت، یک گلولهٔ قرمز به‌دست می‌آید. پس تعداد پیش‌آمدهای مساعد، برابر است با $C_2^1 C_3^1$ و

$$p = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5} \quad (\text{۶۰درصد})$$

ب) *پاسخ.* $p = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ (۳۰درصد).

ج) احتمال این‌که تنها یک گلولهٔ قرمز بیاید، برابر ۶۰درصد و احتمال این‌که هر دو گلوله قرمز باشند، ۳۰ درصد است. بنابراین احتمال این‌که، دست‌کم یکی از

گلوله‌ها قرمز باشد (یعنی یا یک گلوله و یا هردو گلوله قرمز باشند) برابر است با

$$\%۶۰ + \%۳۰ = \%۹۰$$

۱۴۹. $C_۴^۰$ حالت، برای این‌که هیچ‌کدام از پیش‌آمدها، رخ ندهد، $C_۴^۱$ حالت، برای این‌که، تنها یکی از آن‌ها رخ دهد؛ $C_۴^۲$ حالت برای رخ‌داد دوتا از پیش‌آمدها؛ $C_۴^۳$ حالت، برای رخ دادن سه‌تا از آن‌ها؛ و سرانجام $C_۴^۴$ حالت برای این‌که هر ۴ پیش‌آمد رُخ دهند. بنابراین، تعداد پیش‌آمدهای ممکن برابر است با

$$C_۴^۰ + C_۴^۱ + C_۴^۲ + C_۴^۳ + C_۴^۴ = ۲^۴ = ۱۶$$

۱۵۰. $A_{i,۳-i}$ را پیش‌آمدی می‌گیریم که، در آن، از ۳ گلولهٔ انتخابی، i گلوله سفید و $(۳ - i)$ گلوله سیاه باشد. روشن است که چهار حالت وجود دارد: $A_{۳,۰}$، $A_{۲,۱}$، $A_{۱,۲}$ و $A_{۰,۳}$.

چون به ردیف گلوله‌ها علاقه‌ای نداریم، تعداد پیش‌آمدهای ممکن، می‌تواند، هر ترکیب سه‌تایی از ۱۵ گلوله باشد؛ یعنی $C_{۱۵}^۳$. پیش‌آمد $A_{۳,۰}$، به تعداد $C_{۱۰}^۳$ حالت، از پیش‌آمدهای ممکن را دربر می‌گیرد (برداشتن ۳ گلوله از ۱۰ گلولهٔ سفید). پیش‌آمد $A_{۲,۱}$ در $C_{۱۰}^۲.C_۵^۱$ حالت، پیش‌آمد $A_{۱,۲}$ در $C_{۱۰}^۱.C_۵^۲$ حالت و، سرانجام، پیش‌آمد $A_{۰,۳}$ در $C_۵^۳$ حالت، رُخ می‌دهد. احتمال هریک از این پیش‌آمدها چنین است:

$$p(A_{۳,۰}) = \frac{C_{۱۰}^۳}{C_{۱۵}^۳} = \frac{۲۴}{۹۱} \approx ۰/۲۶۴,$$

$$p(A_{۲,۱}) = \frac{C_{۱۰}^۲.C_۵^۱}{C_{۱۵}^۳} = \frac{۴۵}{۹۱} \approx ۰/۴۹۴,$$

$$p(A_{۱,۲}) = \frac{C_{۱۰}^۱.C_۵^۲}{C_{۱۵}^۳} = \frac{۲۰}{۹۱} \approx ۰/۲۲۰$$

$$p(A_{۰,۳}) = \frac{C_۵^۳}{C_{۱۵}^۳} = \frac{۱۰}{۹۱} \approx ۰/۱۱۰$$

بنابراین، احتمال بیشتر این است که دو گلولهٔ سفید و یک گلولهٔ سیاه بیاید.

بُردار و محاسبهٔ برداری

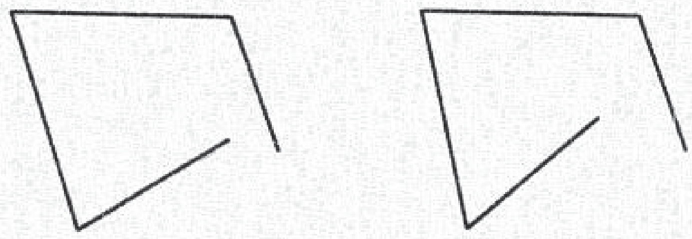
۱۵۱. بله، این تعریف تا اندازه‌ای ما را دچار اشکال می‌کند، زیرا «بردارهای برابر»، درواقع چیزی جز «یک بردار» نیست (درست مثل «عددهای برابر» که به معنای «یک عدد» است). در حالی که دو پاره‌خط راست جهت‌دار برابر، ممکن است یکی نباشند. به همین مناسبت، در این تعریف باید، دست‌کم از واژهٔ «هم‌سنگی» به‌جای واژهٔ «برابری» استفاده کرد. اگر واژهٔ «برابری» را به‌کار بریم، درواقع دو مفهوم ریاضی را با هم مخلوط کرده‌ایم، یعنی مفهوم «برابری» را به‌جای مفهوم «هم‌ارزی» گذاشته‌ایم. دو عنصر ریاضی را وقتی باید برابر دانست که بر هم منطبق باشند، وقتی که یک عنصر را دو بار در نظر گرفته باشیم. به همین مناسبت، وقتی دو مثلث، مثلاً در سه ضلع با هم برابر باشند، بهتر است از واژهٔ «هم‌نهشتی» به‌جای واژهٔ «برابری» استفاده کنیم. هم‌ارزی مفهومی گسترده‌تر از مفهوم برابری است و، البته، مفهوم برابری را هم دربر می‌گیرد. هم‌ارزی به هر بستگی از عنصرهای ریاضی گفته می‌شود که با این سه ویژگی سازگار باشند:

I. هر عنصری با خودش هم‌ارز است؛

II. اگر یک عنصر با عنصر دیگری هم‌ارز باشد، عنصر دوم هم با عنصر اول هم‌ارز است؛

III. اگر عنصری با عنصر دوم و، درضمن، عنصر دوم با عنصر سوم هم‌ارز باشد، عنصر اول هم با عنصر سوم هم‌ارز است.

مثلاً «تشابه شکل‌های هندسی» در مفهوم هم‌ارزی می‌گنجد. همچنین شکل‌های با مساحت‌های برابر هم‌ارزند. وقتی مساحت یک چهارضلعی با مساحت یک مثلث برابر باشد، می‌توان از رابطهٔ هم‌ارزی بین دو شکل صحبت کرد، در حالی که این دو شکل برابر، یعنی قابل انطباق بر یکدیگر نیستند. پاره‌خط‌های راست جهت‌دار برابر



شکل ۵۱

را می‌توان هم‌ارز (یا «هم‌سنگ») دانست، زیرا با ویژگی‌های I تا III سازگار است، ولی برابر خواندن آن‌ها، از نظر منطقی، دقیق نیست.

همهٔ عنصرهای ریاضی هم‌ارز، یک کلاس هم‌ارزی را تشکیل می‌دهند. وقتی با کسرهای ساده کار می‌کنیم، نسبت‌های

$$\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۶}, \frac{۱۰}{۱۵}, \frac{۳۶}{۵۴}, \cdots$$

یک کلاس هم‌ارزی را تشکیل می‌دهند و، همهٔ آن‌ها، معرف یک عدد گویا هستند. تنها وقتی که برابری

$$۲ : ۳ = ۴ : ۶ \text{ یا } \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$$

را بنویسیم، به یک برابری واقعی تبدیل می‌شوند. همین وضع دربارهٔ برابری مثلث‌ها یا شکل‌های دیگر وجود دارد. روشن است که دو شکل ۵۱ یکی نیستند، یعنی روی‌هم قرار نگرفته‌اند. بنابراین، بهتر است دربارهٔ هم‌ارزی آن‌ها صحبت کنیم، نه دربارهٔ برابری آن‌ها [همان‌طور که گفتیم، در هندسه، شکل‌های قابل انطباق را «هم‌نهشت» می‌گویند، یعنی می‌توان آن‌ها را «بر هم نهاد». به‌کار بردن اصطلاح «هم‌نهشتی» هیچ اشکالی ندارد. «هم‌نهشتی» یک «کلاس هم‌ارزی» است]. ولی معمول شده‌است که در هندسه، دو شکل قابل انطباق (هم‌نهشت) را، یک شکل به‌حساب می‌آورند، یعنی مثلاً واژهٔ «چهارضلعی» را برای کلاسی از چهارضلعی‌ها به‌کار می‌برند، به نحوی که هر دوتا از آن‌ها را بتوان، به‌یاری حرکت، بر هم منطبق کرد. تنها بعد از این «قرارداد»

است که می‌توان گزاره‌ای از این‌گونه را آورد که: «مسالهٔ مربوط به ساختن مثلثی که از آن، دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها معلوم باشد، جوابی منحصر به‌فرد دارد» (یعنی با در دست داشتن طول ضلع‌های AB و AC و زاویهٔ A از مثلث ABC، تنها یک مثلث به‌دست می‌آید). ولی روشن است، اگر واژهٔ «مثلث» را به‌معنای اخیر آن (که طبق قرارداد، پذیرفتیم) نگیریم، این گزاره نادرست از آب درمی‌آید. همین درک گسترده‌تر از مفهوم «مثلث» است که ما را قادر می‌سازد از برابری مثلث‌ها صحبت کنیم (ولی این درک از مفهوم مثلث و آوردن قرار داد لازم برای این درک، در درس‌های دبیرستانی مورد تاکید قرار نمی‌گیرد که، البته، درست نیست).

با پاره‌خط‌های راست جهت‌دار هم باید به همین ترتیب برخورد کرد. پاره‌خط‌های راست جهت‌داری را که قابل انطباق‌اند، باید «هم‌ارز» (یا «هم‌سنگ») به‌حساب آورد نه «برابر». ولی اگر همهٔ پاره‌خط‌های راست هم‌جهت و با درازای برابر را در یک کلاس قرار دهیم، به تعریف بردار به‌عنوان خانواده‌ای از پاره‌خط‌های راست جهت‌دار می‌رسیم. این برخورد با مفهوم بردار، دقیق‌تر از آن است که بردار را، به‌عنوان «پاره‌خط راست جهت‌دار» تعریف کنیم.

۱۵۲. چون $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$، پس چهارضلعی $ABDC$ متوازی‌الاضلاع است (زیرا پاره‌خط‌های راست AB و CD مساوی و موازی‌اند؛ راس‌های متوازی‌الاضلاع را باید به ردیف $A \to B \to D \to C$ در نظر گرفت). بنابراین

$$x_A + x_D = x_B + x_C; \quad y_A + y_D = y_B + y_C$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $D(-۴, ۱۴)$.

۱۵۳. اگر همهٔ بردارها را به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست جهت‌داری معرفی کنیم که از یک نقطهٔ O آغاز شده‌اند، آن‌وقت هر نقطهٔ صفحه (که معرف پایان یکی از این بردارهاست)، متناظر با یک بردار می‌شود. اگر نقطهٔ O را مبداء مختصات بگیریم، هر نقطه از صفحه، با دو عدد (طول و عرض آن نقطه) مشخص می‌شود. اکنون اگر در دو دوجمله‌ای $ax + b$، (a, b) را مختصات نقطه‌ای از صفحه فرض کنیم،

دوجمله‌ای $ax + b$ یک بردار را تعریف خواهد کرد. (درواقع، پاره‌خط جهت‌داری که نقطهٔ O آغاز آن و نقطهٔ (a, b) پایان آن است و خانوادهٔ پاره‌خط‌های راست جهت‌دارِ معرف بردار را معین می‌کند). مثلاً دوجمله‌ای $۲x - ۵$ یک بردار را نشان می‌دهد، زیرا متناظر است با $a = ۲$ و $b = -۵$ و نقطهٔ $(۲, -۵)$ متناظر با یک بردار است. به‌همین ترتیب، بردار x متناظر با نقطهٔ $(۱, ۰)$ و بردار ۴ متناظر با نقطهٔ $(۰, ۴)$ است. اگر دوجمله‌ای‌های $ax + b$ و $a'x + b'$ را با هم جمع کنیم، دوجمله‌ای

$$(a + a')x + (b + b')$$

به‌دست می‌آید که معرف بردار $(a + a', b + b')$ است، یعنی مجموع بردارهای (a, b) و (a', b').

یادداشت. همین نتیجه را می‌توان دربارهٔ سه‌جمله‌ای درجه دوم به‌صورت $ax^۲ + bx + c$ انجام داد. در این‌جا، نقطهٔ با مختصات (a, b, c) یک نقطهٔ فضایی و معرف یک بردار در فضاست. چه دربارهٔ دوجمله‌ای و چه دربارهٔ سه‌جمله‌ای، می‌توان آن‌ها را با هم جمع و یا در عددی ضرب کرد، یعنی مجموع دو یا چند بردار یا حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد را به‌دست آورد. در ریاضیات، وقتی با کمیت‌هایی سروکار داشته باشیم که بتوان، آن‌ها را، با هم جمع و یا در عددی ضرب کرد، می‌گویند با فضای برداری سروکار داریم.

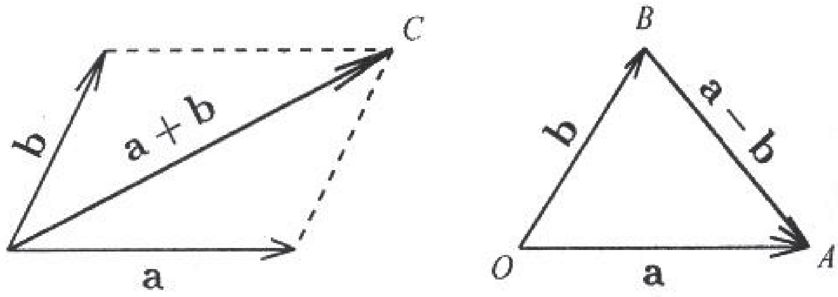
مجموعهٔ همهٔ دوجمله‌ای‌های به‌صورت $ax + b$، یک فضای برداری دوبُعدی و مجموعهٔ همه سه‌جمله‌ای‌های به‌صورت $ax^۲ + bx + c$، یک فضای برداری سه‌بُعدی را تعریف می‌کنند. در حالت کلی، مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌های به‌صورت

$$a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + \ldots + a_{n-۱}x + a_n$$

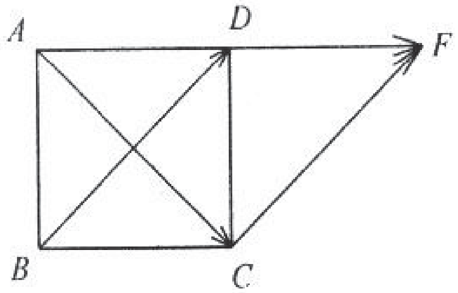
معرف یک فضای برداریِ nبعدی است.

۱۵۴. در شکل ۵۲، الف به روشی دیده می‌شود:

$$|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$$



ب شکل ۵۲ الف



شکل ۵۳

زیرا در هر مثلث، تفاضل طول‌های دو ضلع، از طول ضلع سوم کوچکتر است. علامت برابری وقتی برقرار است که **a** و **b** هم‌راستا و هم‌جهت باشند.

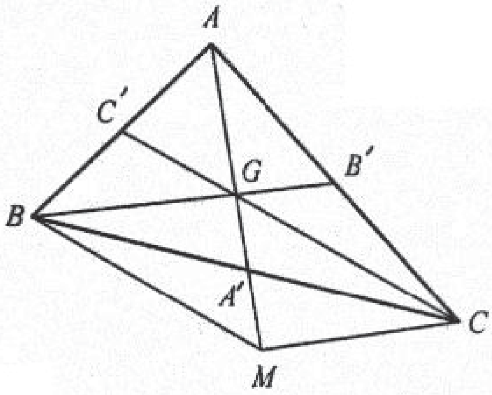
در شکل ۵۲، ب هم، درستی نابرابری $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ نشان داده شده است. باز هم علامت برابری وقتی برقرار است که دو بردار، هم‌راستا و هم‌جهت باشند. حالت‌های دیگر را خودتان روی شکل نشان دهید.

یادداشت. در حالت کلی و برای n بردار، این نابرابری همیشه برقرار است:

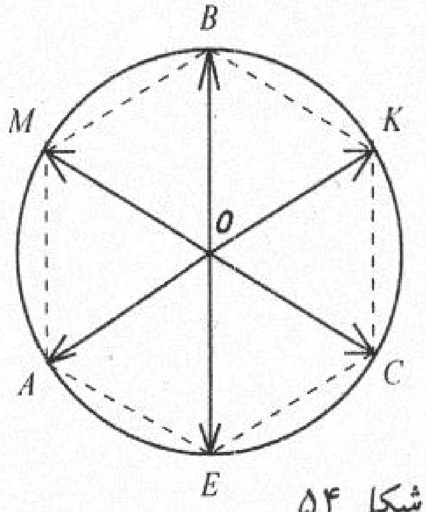
$$|\mathbf{a}_۱ + \mathbf{a}_۲ + \mathbf{a}_۳ + \ldots + \mathbf{a}_n| \leq |\mathbf{a}_۱| + |\mathbf{a}_۲| + |\mathbf{a}_۳| + \ldots + |\mathbf{a}_n|$$

۱۵۵. اگر از راس C موازی BD رسم کنیم تا امتداد AD را در F قطع کند (شکل ۵۳)، چهارضلعی $BCFD$ متوازی‌الاضلاع می‌شود و داریم: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CF}$؛ بنابراین

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF} \qquad (۱)$$



شکل ۵۵



شکل ۵۴

در همان متوازی‌الاضلاع $BCFD$ داریم: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DF}$. بنابراین

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

۱۵۶. همه‌چیز روی شکل ۵۴، به‌روشنی دیده می‌شود.

$$\mathbf{x}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OC},$$
$$\mathbf{y}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK},$$
$$\mathbf{z}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB},$$
$$\mathbf{t}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$$

۱۵۷. باتوجه به متوازی‌الاضلاع $BGCM$ (شکل ۵۵) داریم:

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}$$

ولی $\vec{GM}=-\vec{GA}$ (نقطهٔ G محل برخورد میانه‌ها است، بنابراین داریم: $|GA'|=\frac{1}{2}|GA|$، درنتیجه $|GA|=|GM|$). بنابراین

$$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{GA}-\vec{GA}=\vec{0}$$

عکس قضیه هم درست است. فرض کنیم، برای نقطهٔ G واقع در دورن مثلث ABC داشته باشیم:

$$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0} \qquad (1)$$

مجموع $\vec{GB}+\vec{GC}$ را، با قانون متوازی‌الاضلاع پیدا می‌کنیم:

$$\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{GM}$$

بنابراین، باتوجه به (۱) به‌دست می‌آید:

$$\vec{GM}=-\vec{GA}$$

یعنی بردارهای $\vec{GM}$ و $\vec{GA}$ دو بردار متقابل‌اند، بنابراین A و G و M روی یک خط راست‌اند؛ درضمن، این خط راست، ضلع BC را نصف می‌کند (در متوازی‌الاضلاع $BMCG$، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند)؛ یعنی میانهٔ AA' از نقطهٔ G می‌گذرد. به همین ترتیب، ثابت می‌شود، میانه‌های BB' و CC' هم از G عبور می‌کنند. یعنی G، نقطهٔ برخورد میانه‌ها و گرانیگاه مثلث است.

***یادداشت.** نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث را مرکز هندسی مثلث هم می‌گویند. به‌طور کلی، نقطهٔ G را مرکز هندسی دستگاه نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n گویند، وقتی که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$\vec{GA}_1+\vec{GA}_2+\ldots+\vec{GA}_n=\vec{0}$$

درضمن، اگر O نقطهٔ دلخواهی از صفحه (یا فضا) باشد، می‌توان ثابت کرد:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{۱}{n}(\overrightarrow{OA}_۱+\overrightarrow{OA}_۲+\ldots+\overrightarrow{OA}_n)$$

این برابری برداری را، برای سه نقطهٔ A، B و C و نقطهٔ O واقع در صفحهٔ ABC ثابت کنید، یعنی اگر G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC و O نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ مثلث باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

۱۵۸. نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع را O می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\frac{۱}{۲}\mathbf{b}+\frac{۱}{۲}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{۱}{۲}\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{۱}{۲}\mathbf{b}-\frac{۱}{۲}\mathbf{a},$$

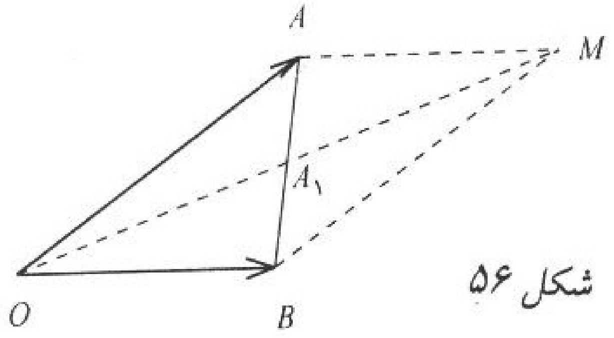
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{۱}{۲}\mathbf{b}+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}$$

۱۵۹. فرض کنید $A_۱$ وسط پاره‌خط راست AB باشد. اگر نقطه دلخواه O را در نظر بگیریم، بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$، مجموعی برابر بردار $\overrightarrow{OM}$ خواهند داشت ($OAMB$ متوازی‌الاضلاع است). پس (شکل ۵۶):

$$\overrightarrow{OA}_۱=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

به همین ترتیب به‌دست می‌آیند

$$\overrightarrow{OB}_۱=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OC}_۱=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),$$
$$\overrightarrow{OD}_۱=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}),\quad \overrightarrow{OE}_۱=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA})$$



شکل ۵۶

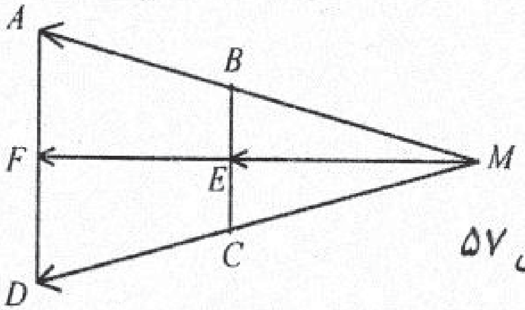
نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1 و E_1 و، بنابراین، بردارهای $\overrightarrow{OA_1}$، $\overrightarrow{OB_1}$، $\overrightarrow{OC_1}$، $\overrightarrow{OD_1}$ و $\overrightarrow{OE_1}$ معلوم‌اند؛ باید بردارهای مجهول $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OE}$ را پیدا کرد. در واقع، اگر یکی از این پنج بردار مجهول را پیدا کنیم، برای رسم پنج‌ضلعی کافی است، فرض کنید $\overrightarrow{OA}$ و درنتیجه نقطهٔ A به‌دست آمده باشد، چون A_1 وسط پاره‌خط راست AB و E_1 وسط پاره‌خط راست EA است، اگر از A به A_1 و E_1 وصل کنیم، اولی را به اندازهٔ $|AA_1|$ و دومی را به اندازهٔ $|AE_1|$ امتداد دهیم، به نقطه‌های B و E می‌رسیم و، به‌همین ترتیب، راس‌های دیگر پنج‌ضلعی به‌دست می‌آید.

برابری‌های برداری که پیدا کردیم، پنج معادلهٔ پنج‌مجهولی (برای مجهول‌های $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{OD}$، $\overrightarrow{OE}$) تشکیل می‌دهند. دو طرف معادله‌های دوم و چهارم را تغییر علامت می‌دهیم و، سپس، پنج معادله را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OE_1} \qquad (*)$$

به یاری برابری $(*)$، بردار $\overrightarrow{OA}$ را می‌توان ساخت که، از آن‌جا، نقطهٔ A (یکی از راس‌های پنج‌ضلعی) و، سپس، باد در دست داشتن A، چهار راس دیگر آن به‌دست می‌آید.

۱۶۰. ذوزنقهٔ $ABCD$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم امتداد ساق‌های AB و DC در نقطهٔ M به هم رسیده باشند (شکل ۵۷). E را وسط قاعدهٔ BC



شکل ۵۷

و F را وسط قاعدهٔ AD می‌گیریم. داریم:

$$\vec{ME}=\frac{۱}{۲}(\vec{MB}+\vec{MC}),\ \vec{MF}=\frac{۱}{۲}(\vec{MA}+\vec{MD} \qquad (۱)$$

(هنوز نمی‌دانیم خط‌های راست ME و MF روی‌هم واقع‌اند یا جدا از یکدیگرند).

خط‌های راست AD و BC با هم موازی‌اند. بنابراین

$$\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{|MD|}{|MC|}=k$$

(k عددی است حقیقی و بزرگتر از واحد). یعنی می‌توان نوشت:

$$\vec{MA}=k\,\vec{MB},\ \vec{MD}=k\,\vec{MC}$$

بنابراین، برای بردار $\vec{MF}$ در برابری (۱)، به‌دست می‌آید:

$$\vec{MF}=\frac{k}{۲}(\vec{MB}+\vec{MC})$$

اگر این برابری را با برابری مربوط به $\vec{ME}$ در (۱) مقایسه کنیم، معلوم می‌شود که بردارهای $\vec{ME}$ و $\vec{MF}$ در یک راستا هستند؛ ولی از آن‌جا که آغاز این دو بردار مشترک است، نتیجه می‌گیریم که، نقطه‌های M و E و F، روی یک خط راست‌اند.

۱۶۱. *پاسخ.* الف) بردارهای **a** و **b** هم‌راستا نیستند، زیرا در این حالت داریم: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$، ب) **a** و **b** دو بردار هم‌راستا هستند، ولی بردار **c** با آن‌ها هم‌راستا نیست؛ ج) بردارهای **a** و **b** و **c** هم‌راستا هستند.

۱۶۲. مرکز nضلعی منتظم را O می‌نامیم و به‌عنوان مبداء مختصات انتخاب می‌کنیم. در این صورت، شعاع‌های بُرداری راس‌های nضلعی، به‌این صورت قابل تجزیه‌اند:

$$\vec{OA}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j},$$
$$\vec{OA}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}, \ldots,$$
$$\vec{OA}_n = x_n \vec{i} + y_n \vec{j}$$

که در آن‌ها، $A_1(x_1, y_1)$، $A_2(x_2, y_2)$، ...، $A_n(x_n, y_n)$ راس‌های nضلعی و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای واحد روی محورها هستند. ولی مجموع این شعاع‌های برداری برابر بردار صفر است. درواقع، اگر تعداد راس‌های nضلعی، عددی زوج باشد، دوبه‌دوی راس‌ها نسبت به مرکز nضلعی قرینهٔ یکدیگرند و، بنابراین، مجموع شعاع‌های برداری آن‌ها برابر بردار صفر می‌شود. ولی اگر تعداد راس‌های nضلعی، عددی فرد باشد، یکی از محورهای تقارن nضلعی را در نظر می‌گیریم (این محور تقارن، از یک راس و وسط ضلع روبه‌روی به آن می‌گذرد). یکی از شعاع‌های برداری در امتداد این محور قرار دارد و بقیه، دوبه‌دو نسبت به این محور، قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین، مجموع همهٔ آن‌ها، به‌صورت برداری درمی‌آید که در امتداد این محور است. ولی nضلعی منتظم (وقتی n، عددی فرد باشد) دارای n محور تقارن است؛ یعنی مجموع شعاع‌های برداری راس‌ها، باید در امتداد هریک از این محورهای تقارن قرار گیرد. و این، تنها وقتی ممکن است که، این مجموع، برابر بردار صفر باشد. به این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\vec{i} + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\vec{j} = \vec{0}$$

و این برابری تنها وقتی برقرار است که

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۰,\ y_۱ + y_۲ + \ldots + y_n = ۰$$

اکنون اگر خط راستی را که از مرکز nضلعی می‌گذرد، به‌عنوان محور $x'x$ (یا $y'y$) انتخاب کنیم، درستی حکم مساله، از برابری اخیر نتیجه می‌شود.

۱۶۳. $ABCD$ را یک متوازی‌الاضلاع می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}$$

در این صورت داریم:

$$\overrightarrow{AC}^۲ = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^۲ = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^۲ = \mathbf{a}^۲ + ۲\mathbf{ab} + \mathbf{b}^۲,$$
$$\overrightarrow{BD}^۲ = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^۲ = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^۲ = \mathbf{a}^۲ - ۲\mathbf{ab} + \mathbf{b}^۲$$

از آن‌جا

$$|\overrightarrow{AC}|^۲ + |\overrightarrow{BD}|^۲ = ۲|\mathbf{a}|^۲ + ۲|\mathbf{b}|^۲ =$$
$$= |\overrightarrow{AD}|^۲ + |\overrightarrow{BC}|^۲ + |\overrightarrow{AB}|^۲ + |\overrightarrow{DC}|^۲$$

و چون طول مجذور هر بردار با مجذور طول آن برابر است، به‌دست می‌آید:

$$|AC|^۲ + |BD|^۲ = |AB|^۲ + |BC|^۲ + |CD|^۲ + |DA|^۲$$

۱۶۴. $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$ ، $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{CA}=\mathbf{b}$ و میانه‌های مثلث را $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ می‌نامیم. در این صورت

$$\overrightarrow{AA_۱}=\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_۱}=\mathbf{c}+\frac{۱}{۲}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{BB_۱}=\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}\mathbf{b},\ \overrightarrow{CC_۱}=\mathbf{b}+\frac{۱}{۲}\mathbf{c}$$

که از مجموع آن‌ها، نتیجه می‌شود:

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |\mathbf{CC}_1|^2 = (\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a})^2 +$$

$$+(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b})^2 + (\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c})^2 =$$

$$= \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

(a، b، c را درازای بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ گرفته‌ایم). اما می‌دانیم:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{0}$$

(چرا؟). درنتیجه

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = 0$$

یعنی $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. از آن‌جا

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |CC_1|^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) -$$

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

در هر مثلث، مجموع مجذورهای طول‌های سه میانه، برابر است با $\frac{3}{4}$ مجموع مجذورهای طول‌های سه ضلع.

۱۶۵. نقطهٔ دلخواه O را به‌عنوان آغاز بردارها در نظر می‌گیریم و، برای سادگی کار، بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ را با $\vec{A}$، $\vec{B}$، $\vec{C}$ و $\vec{D}$ نشان می‌دهیم. برابری فرض، به این صورت درمی‌آید:

$$(\vec{C} - \vec{A})^2 - (\vec{C} - \vec{B})^2 = (\vec{D} - \vec{A})^2 - (\vec{D} - \vec{B})^2$$

که پس از باز کردن پرانتزها، به‌دست می‌آید:

$$\vec{C}\cdot\vec{B}-\vec{C}\cdot\vec{A}=\vec{B}\cdot\vec{D}-\vec{D}\cdot\vec{A}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\vec{B}-\vec{A})(\vec{C}-\vec{D})=0$$

برابری اخیر را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$(\vec{OB}-\vec{OA})(\vec{OC}-\vec{OD})=0\Rightarrow\vec{BA}\cdot\vec{DC}=0$$

و چون هیچ‌کدام از بردارهای $\vec{BA}$ و $\vec{DC}$ برابر بردار صفر نیستند، برای این‌که حاصل‌ضرب عددی آن‌ها برابر صفر شود، باید خط‌های راست AB و CD بر هم عمود باشند.

ماتریس ـ دترمینان

۱۶۶. درواقع داریم: $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}5\\2\end{vmatrix}$ ، $C\begin{vmatrix}5\\6\end{vmatrix}$ و $D\begin{vmatrix}1\\6\end{vmatrix}$.
نقطه‌های A و B، عرض‌های برابر دارند، بنابراین پاره‌خط راست AB موازی محور $x'x$ است. نقطه‌های C و D هم عرض‌های برابر دارند، بنابراین پاره‌خط راست CD هم با $x'x$ موازی است. از این‌جا نتیجه می‌شود، AB و CD، دو ضلع روبه‌رو در چهارضلعی $ABCD$ موازی $x'x$ و، درنتیجه، با هم موازی‌اند. به‌همین ترتیب، روشن می‌شود که، ضلع‌های AD و BC با محور $y'y$ و، درنتیجه، با هم موازی‌اند؛ یعنی چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. در این مستطیل، طول ضلع AB برابر ۴ و طول ضلع BC هم برابر ۴ است (چرا؟)؛ و اگر در یک مستطیل، دو ضلع مجاور، طولی برابر داشته باشند، به معنای آن است که با یک مربع سروکار داریم.

پاسخ. چهارضلعی $ABCD$ مربعی است با ضلع‌های موازی محورهای مختصات.

۱۶۷. در آغاز یادآوری می‌کنیم، یک راه ساختن این‌گونه جدول‌ها، این است که: یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول دلخواه و قدرنسبت دلخواه در نظر بگیرید و خانه‌های جدول خود را (جدول ۳ × ۳ یا ۴ × ۴ یا ۵ × ۵ و غیره) با عددهای این تصاعد پر کنید، به‌این ترتیب که، از سطر اول آغاز کنید و جمله‌های تصاعد را به ردیف، از چپ به راست در آن قرار دهید، سپس جمله‌های بعدی تصاعد را در سطر دوم، بعد سطر سوم و غیره. مثلاً، این تصاعد را در نظر بگیرید:

$$۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, \ldots \qquad (۱)$$

در شکل ۵۸، دو نمونه از این ماتریس‌ها را می‌بینید: شکل ۵۸ـالف ماتریس ۳ × ۳ و شکل ۵۸ـب ماتریسی ۴ × ۴ است.

۱	۴	۷
۱۰	۱۳	۱۶
۱۹	۲۲	۲۵

الف

۱	۴	۷	۱۰
۱۳	۱۶	۱۹	۲۲
۲۵	۲۸	۳۱	۳۴
۳۷	۴۰	۴۳	۴۶

ب

شکل ۵۸

مقدار ثابت ماتریس شکل ۵۸ـالف، برابر ۳۹ و عدد ثابت ماتریس شکل ۵۸ـب برابر ۹۴ است.

ولی اگر بخواهید همین دو ماتریس، اندکی بیشتر رمزگونه شوند، همین جمله‌های تصاعد (۱) را می‌توانید به‌گونهٔ دیگری در آن‌ها قرار دهید. یکی از سطرهای جدول را (هر سطری که باشد)، با جمله‌های اول تصاعد، به ردیفی دلخواه پر کنید. مثلاً این جمله‌ها را ر شکل ۵۹ـالف در سطر دوم با ردیف (۱، ۷، ۴) و در جدول ۴ × ۴ شکل ۵۹ـب، در سطر سوم و به ردیف (۷, ۱, ۱۰, ۴) قرار داده‌ایم. عددهای سطرهای دیگر را (با انتخاب دلخواه سطرها) با همان ردیف پر کرده‌ایم. در جدول ۵۹ـالف، بعد از سطر دوم سطر اول و سرانجام سطر سوم را انتخاب کرده‌ایم. چون

سه جملهٔ اول تصاعد را در سطر دوم، به‌ترتیب، اول در ستون سوم، بعد در ستون اول و سرانجام در ستون دوم گذاشته بودیم، گروه‌های سه‌عددی مربوط به سطرهای دیگر را هم، به همین ردیف قرار می‌دهیم. در جدول ۵۹ـب، بعد از سطر سوم، سطر اول، بعد سطر چهارم و سرآخر سطر دوم را پر کرده‌ایم. این دو جدول هم، همان مقدارهای ثابت ۳۹ و ۹۴ را دارند.

۱۳	۱۶	۱۰
۴	۷	۱
۲۲	۲۵	۱۹

الف

۱۶	۲۲	۱۳	۱۹
۳۰	۴۶	۳۷	۴۳
۴	۱۰	۱	۷
۲۸	۲۴	۲۵	۳۱

ب

شکل ۵۹

برای این‌که با راز این جدول‌ها آشنا شویم، راه دیگری برای ساختن آن‌ها می‌آوریم. فرض کنید بخواهیم یک جدول ۵ × ۵ را با این ویژگی بسازیم. ۱۰ عدد دلخواه انتخاب کنید (مثبت، منفی یا صفر). می‌توان این عددها را مختلف گرفت یا بعضی از آن‌ها را برابر با هم انتخاب کرد. این ده عدد را به دو گروه دلخواه ۵ عددی تقسیم کنید. فرض کنید این دو گروه چنین باشند:

گروه اول: ۳, ۹, ۶, ۸, ۷

گروه دوم: ۲, −۳, ۵, ۱۰, −۱

با این ۱۰ عدد، که مجموعی برابر ۴۶ دارند، می‌توان ماتریسی ۵ × ۵ با ویژگی مورد نظر ساخت. جدولی ۵ × ۵ رسم کنید و عددهای گروه اول را بالای جدول و روی ستون‌ها از چپ به راست و عددهای گروه دوم را سمت چپ جدول از بالا به پایین بنویسید (شکل ۶۰). سپس، در هر خانهٔ جدول، مجموع دو عددی را بنویسید که در بیرون جدول در همان سطر و همان ستون قرار دارند (جدول شکل ۶۰ را، با همین روش، پر کرده‌ایم). جدولی با ویژگی مورد نظر ما و با مجموع ثابت ۴۶ (همان مجموع ۱۰ عدد انتخابی) به‌دست می‌آید. به شکل ۵۹ هم توجه کنید، در

واقع با همین قانون ساخته شده است.

	۳	۹	۶	۸	۷
۲	۵	۱۱	۸	۱۰	۹
۳−	۰	۶	۳	۵	۴
۵	۸	۱۴	۱۱	۱۳	۱۲
۱۰	۱۳	۱۹	۱۶	۱۸	۱۷
۱−	۲	۸	۵	۷	۶

شکل ۶۰

با این توضیح‌ها، به راز جدول پی بردید. دربارهٔ آن دقت کنید. می‌توان دربارهٔ این‌گونه جدول‌ها نکته‌های دیگری هم آورد.

۱) اگر بخواهید جدولی ۳×۳، با مجموع ثابت برابر a درست کنید، ۱۲ واحد از a کم کنید و، سپس، خارج‌قسمت را بر ۳ تقسیم کنید، $\frac{a - ۱۲}{۳}$ به‌دست می‌آید. با ۹ جملهٔ اول تصاعدی حسابی که جملهٔ اول آن $\frac{a - ۱۲}{۳}$ و قدر نسبت آن برابر ۱ باشد، می‌توان ماتریس ۳×۳ را ساخت که مقدار ثابت آن برابر a باشد.

۲) اگر جدولی ۴×۴ لازم داشته باشید و بخواهید مقدار ثابت آن برابر a باشد، باید به‌عنوان جملهٔ اول تصاعد، عدد $\frac{a - ۳۰}{۴}$ و به‌عنوان قدر نسبت تصاعد، همان عدد ۱ را انتخاب کنید.

۳) بیندیشید: عددهای $\frac{a - ۱۲}{۳}$ و $\frac{a - ۳۰}{۴}$ از کجا آمده‌اند؟ برای تنظیم جدول ۵×۵ با مقدار ثابت a، چه عددی را باید به‌عنوان جملهٔ اول تصاعد حسابی انتخاب کرد؟ برای جدول ۶×۶ چطور؟ قدرنسبت تصاعد را، همواره برابر ۱ بگیرید.

۱۶۸. دو ماتریس را قرینهٔ یکدیگر گویند، وقتی که درایه‌های نظیر در دو ماتریس، قرینهٔ هم باشند. بنابراین، قرینهٔ یک ماتریس $m \times n$، یک ماتریس $m \times n$ است با درایه‌های قرینهٔ ماتریس اول. درنتیجه روشن است که مجموع دو ماتریس، ماتریس صفر با مرتبهٔ $m \times n$ به‌دست می‌آید.

۱۶۹. اگر دو ماتریس سمت چپ برابری را در هم ضرب (این ضرب ممکن است، زیرا تعداد ستون‌های عامل اول‌ضرب با تعداد سطرهای عامل دوم، یکی است)

و ماتریس‌های سمت راست برابری را با هم جمع می‌کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} x - ۲y \\ ۲x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲y = ۹ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$$

و با حل این دستگاه سادهٔ دومعادلهٔ دومجهولی به‌دست می‌آید: $x = ۵$ و $y = -۲$.

۱۷۰.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، زیرا $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$؛

ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، زیرا $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$؛

ج) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، زیرا $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

۱۷۱. به‌ترتیب داریم:

الف) $$\begin{bmatrix} -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۵ & ۶ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -۳ \times ۴ + ۴ \times ۵ + ۱ \times ۰ & -۳ \times ۲ + ۴ \times ۶ + ۱ \times ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۲۵ \end{bmatrix};$$

ب) $$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \times ۵ + ۲ \times ۶ \\ ۳ \times ۵ + ۴ \times ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۷ \\ ۳۹ \end{bmatrix};$$

ج) $$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ \times ۳ - ۱ \times ۵ & ۱ \times -۷ - ۱ \times ۱ \\ ۰ \times ۳ + ۲ \times ۵ & ۰ \times -۷ + ۲ \times ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۸ \\ ۱۰ & ۲ \end{bmatrix};$$

د) $$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ \times ۱ + ۰ \times -۱ & ۱ \times ۲ + ۰ \times -۲ & ۱ \times ۳ + ۰ \times -۳ \\ -۱ \times ۱ + ۲ \times -۱ & -۱ \times ۲ + ۲ \times -۲ & -۱ \times ۳ + ۲ \times -۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۳ & -۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

۱۷۲. *راهنمایی*. مساله ۱۷۰ را ببینید.

پاسخ. اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ به‌ترتیب، قرینه‌های A نسبت به محور $x'x$، محور $y'y$ و مبداء مختصات باشند، داریم:

$$A_۱(۱-m, -۱-m), \quad A_۲(m-۱, m+۱), \quad A_۳(m-۱, -m-۱)$$

۱۷۳. اگر ماتریس‌های سمت چپ برابری را در هم ضرب کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} ۴b-۱ \\ ab+۳۵-۸b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ \\ -۲۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۴b-۱=-۹ \\ ab+۳۵-۸b=-۲۵ \end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه به‌دست می‌آید: $b=-۲$؛ اگر این مقدار b را در معادلهٔ دوم دستگاه بگذاریم، مقدار a به‌دست می‌آید: $a=۳۸$.

۱۷۴. به‌ترتیب داریم:

$$\text{(الف)}\ A+B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix};$$

$$\text{(ب)}\ A-B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix};$$

$$\text{(ج)}\ A^{-۱} = \frac{۱}{۱\times۳-۲\times-۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۷} & \frac{۲}{۷} \\ -\frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix};$$

$$\text{(د)}\ B^{-۱} = \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۹} & \frac{۴}{۹} \\ -\frac{۱}{۹} & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix};$$

ه) $A^۲ + B^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} +$

$+ \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} ۱ \times ۱ + (-۲) \times ۲ & ۱ \times (-۲) + (-۲) \times ۳ \\ ۲ \times ۱ + ۳ \times ۲ & ۲ \times (-۲) + ۳ \times ۳ \end{bmatrix} +$

$+ \begin{bmatrix} ۱ \times ۱ - ۴ \times ۱ & ۱ \times -۴ - ۴ \times ۵ \\ ۱ \times ۱ + ۵ \times ۱ & ۱ \times -۴ + ۵ \times ۵ \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -۳ & -۸ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & -۲۴ \\ ۶ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ & -۳۲ \\ ۱۴ & ۲۶ \end{bmatrix};$

و) $AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۱۴ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix};$

ز) $BA = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ & -۱۴ \\ ۱۱ & ۱۳ \end{bmatrix};$

می‌بینید $AB \neq BA$. در ضرب ماتریس‌ها، قانون جابه‌جایی وجود ندارد.

۱۷۵. جواب را به‌یاری دترمینان‌های ۲×۲ به‌دست می‌آوریم:

الف) $\begin{cases} (a-۳)x + ay = ۲ \\ ۵x + ۲y = -۲ \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & a \\ -۲ & ۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-۳ & a \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a-۳ & ۲ \\ ۵ & -۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-۳ & a \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix}}$$

که پس از محاسبهٔ دترمینان‌ها به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{۲(a+۲)}{-۳(a+۲)} \quad y = \frac{-۲(a+۲)}{-۳(a+۲)}$$

۱) اگر $a \neq -۲$، آن‌وقت $x = -\frac{۲}{۳}$ و $y = \frac{۲}{۳}$؛

۲) اگر $a = -2$، آن‌وقت دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی به یک معادلهٔ دومجهولی تبدیل می‌شود:

$$5x + 2y = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}(y+1)$$

که می‌توان y را، هر عدد حقیقی دلخواه انتخاب کرد و، سپس، مقدار x را از برابری $x = -\frac{2}{5}(y+1)$ به‌دست آورد.

$$\text{ب)} \begin{cases} ax + by = 2 \\ bx + ay = \dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & b \\ \dfrac{a^2+b^2}{ab} & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & \dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}$$

دستگاه به‌شرطی معنا دارد که داشته‌باشیم $ab \neq 0$، یعنی هیچ‌کدام از مقدارهای a یا b برابر صفر نباشد (در غیر این صورت، معادله دوم دستگاه بی‌معنی می‌شود). با این شرط، بعد از باز کردن دترمینان‌های صورت و مخرج، به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{a - \dfrac{b^2}{a}}{a^2 - b^2},\ y = \frac{\dfrac{a^2}{b} - b}{a^2 - b^2}$$

۱) اگر $a^2 \neq b^2$ (یعنی $a \neq \pm b$)، آن‌وقت با ساده کردن کسرها به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{1}{a},\ y = \frac{1}{b}$$

۲) اگر $a = b$، آن‌وقت دو معادلهٔ دستگاه به یک معادلهٔ دومجهولی تبدیل می‌شوند:

$$x + y = \frac{2}{a} \Rightarrow y = \frac{2}{a} - x$$

۳) اگر $b=-a$، آن‌وقت به یک معادلهٔ دومجهولی می‌رسیم:

$$x-y=\frac{۲}{a}\Rightarrow y=x-\frac{۲}{a}$$

پاسخ. دستگاه به‌ازای $ab=۰$ معنا ندارد؛

دستگاه به‌ازای $a=b$ به‌صورت معادله $y=\frac{۲}{a}-x$ درمی‌آید؛ برای x می‌توان هر عدد حقیقی دلخواه انتخاب و به‌کمک آن مقدار y را به‌دست آورد. در این حالت، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد؛

دستگاه، به‌ازای $a=-b$ به معادلهٔ $y=x-\frac{۲}{a}$ درمی‌آید، یعنی بی‌نهایت جواب دارد؛

دستگاه، در حالت $ab\neq ۰$ و $a^۲\neq b^۲$، یک جواب منحصر دارد: $x=\frac{۱}{a}$ و $y=\frac{۱}{b}$.

۱۷۶. به‌ترتیب داریم:

$$۱)\begin{vmatrix}\sin\alpha+\cos\alpha & \sin\alpha-\cos\alpha\\ \tan\alpha+\cot\alpha & \tan\alpha-\cot\alpha\end{vmatrix}=$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\tan\alpha-\cot\alpha)-$$

$$-(\sin\alpha-\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)=$$

$$=(\sin\alpha\tan\alpha-\sin\alpha\cot\alpha+\cos\alpha\tan\alpha-$$

$$-\cos\alpha\cot\alpha)-(\sin\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\cot\alpha-$$

$$-\cos\alpha\tan\alpha-\cos\alpha\cot\alpha)=۲(\sin\alpha-\cos\alpha)$$

۲) می‌توان برحسب سطر اول باز کرد و به جواب رسید. ولی اگر مجموع سطرهای دوم و سوم را با سطر اول جمع کنیم و به‌جای سطر اول قرار دهیم، کار

محاسبه ساده‌تر می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

اکنون در دترمینان مرتبه ۳، قرینه ستون سوم را، به‌ترتیب با ستون‌های اول و دوم جمع می‌کنیم و به‌جای این ستون‌ها قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ b-a & c-a & a \\ c-b & a-b & b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c-b & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(ab+ac+bc-a^{۲}-b^{۲}-c^{۲})$$

۳) پاسخ. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$.

۱۷۷. حاصل دترمینان سمت چپ، برابر

$$۱-\cos^{۲}\alpha-\cos^{۲}\beta-\cos^{۲}\gamma+۲\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

و حاصل دترمینان سمت راست، برابر

$$۲\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

می‌شود، بنابراین، برای برابر بودن مقدار دو دترمینان، باید داشته باشیم:

$$\cos^{۲}\alpha+\cos^{۲}\beta+\cos^{۲}\gamma=۱$$

۱۷۸. حاصل‌ضرب AB، ماتریسی است ۳ × ۳. برای درایه‌های سطر اول ماتریس حاصل‌ضرب داریم:

$$\left.\begin{array}{l} [۱ \quad ۲ \quad ۰]\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱۱ \end{bmatrix} = ۱ \times ۱ + ۲ \times ۱ + ۰ \times ۱۱ = ۳; \\ [۱ \quad ۲ \quad ۰]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = ۱ \times ۲ + ۲ \times ۱ + ۰ \times ۱۰ = ۴; \\ [۱ \quad ۲ \quad ۰]\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = ۱ \times ۳ + ۲ \times -۱ + ۰ \times ۱۰ = ۱; \end{array}\right\} \text{درایه‌های سطر اول } AB$$

به‌همین ترتیب، درایه‌های سطرهای دوم و سوم هم به‌دست می‌آید:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱۱ & ۱۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}$$

اکنون، اگر AC را محاسبه کنیم، به همان نتیجه AB می‌رسیم:

$$AC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱۲ & ۲ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}$$

داریم: $AB = AC$، ولی $B \neq C$. قانون حذف که در برابری‌های جبری وجود دارد، در برابری‌های ماتریسی برقرار نیست. ولی، اگر $C = B$، آن‌گاه $AB = AC$ و $CA = BA$؛ به‌شرطی که ردیف عامل‌های ضرب، رعایت شود، زیرا ممکن است BA با AB یا AC با CA برابر نباشد.

۱۷۹. الف) معادله‌های ضلع‌های مثلث، در این‌جا داده شده است:

$$A\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۲ \end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۳ \end{matrix}\right. ;\ \begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad (AB)$$

$$A\begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix},\ C\begin{vmatrix} ۳ \\ ۵ \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad (AC)$$

$$B\begin{vmatrix} ۴ \\ ۳ \end{vmatrix},\ C\begin{vmatrix} ۳ \\ ۵ \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \qquad (BC)$$

دترمینان‌ها را باز کنید و معادلهٔ هر ضلع را به‌صورت متعارف آن بنویسید.

ب) برای مساحت مثلث ABC، به‌ترتیب داریم:

$$۲S = \begin{vmatrix} -۱ & ۴ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} - ۴\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} + ۳\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} =$$

$$= -(۳-۵) - ۴(۲-۵) + ۳(۲-۳) =$$

$$= ۲ + ۱۲ - ۳ = ۱۱ \text{ (واحد مربع)}$$

بنابراین، مساحت مثلث ABC، برابر $۵\frac{۱}{۲}$ واحد مربع است.

۱۸۰. بدون این‌که، با روش عادی، دترمینان را باز کنیم، می‌توانیم حاصل آن را به‌دست آوریم. در آغاز، مجموع دو سطر دوم و سوم را، به‌جای سطر دوم می‌گذاریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & ۱ \\ b+c & c+a & a+b & ۲ \\ c & a & b & ۱ \\ \frac{b+c}{۲} & \frac{c+a}{۲} & \frac{a+b}{۲} & ۱ \end{vmatrix}$$

اکنون، دو برابر سطر چهارم را از سطر دوم کم می‌کنیم و به‌جای سطر دوم قرار

می‌دهیم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ c & a & b & ۱ \\ \frac{b+c}{۲} & \frac{c+a}{۲} & \frac{a+b}{۲} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

زیرا، دترمینانی که درایه‌های یک سطر یا یک ستون آن، همگی برابر صفر باشند، مقداری برابر صفر دارد.

پاسخ. $\Delta = ۰$.